

# Gauss Reloaded

Franziska Konitzer

■ **Die moderne Geodäsie liefert Punktwolken ganzer Stadtviertel, Erdmessung aus dem All in Echtzeit und Milliarden von Einzelbeobachtungen. Können die derzeitigen mathematischen Methoden und Modelle angesichts von immer mehr und präziseren Daten Schritt halten?**

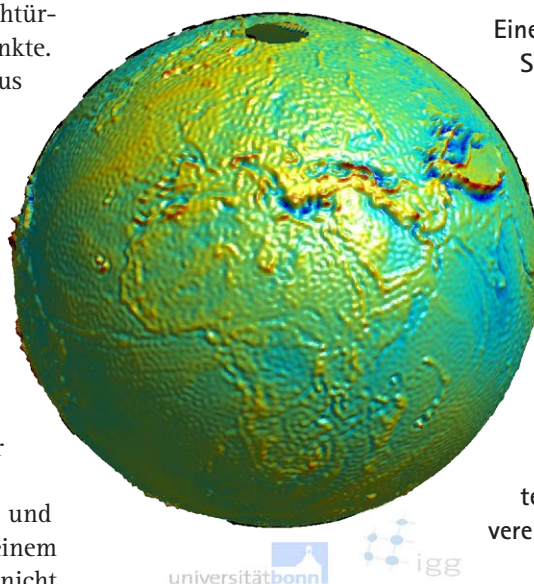
Keine Frage, es ist einige Zeit ins Land gegangen, seit Carl Friedrich Gauss mit einem Sextanten durch die Gegend von Braunschweig zog und Triangulationen durchführte. Seine Objekte der Begierde waren dabei zumeist Kirchtürme und er brachte es immerhin auf rund hundert Punkte. Zweihundert Jahre später gibt es Satelliten, die aus dem All die Erde rund um die Uhr beobachten. So wird das globale Schwerfeld der Erde und auch deren zeitlichen Veränderungen und Schwankungen aus dem Weltraum durch Satelliten erfasst. Das aktuelle Modell des Erdschwerfeldes, das Daten der GOCE-, CHAMP- und GRACE-Satelliten beinhaltet, basiert auf 440 Millionen Beobachtungen und bringt es auf 100.000 Parameter. Und auch auf dem Boden der irdischen Tatsachen sorgen Verfahren, wie die Photogrammetrie oder das Laserscanning, für hochpräzise Einblicke – aber eben auch für eine gigantische Datenmenge.

All diese Daten und Punkte mit ihren Fehlern und Unsicherheiten in ein Modell zu packen und zu einem Ergebnis zu kommen, das ihnen gerecht wird, ist nicht einfach. Gauss entwickelte seinerzeit die mathematischen Grundlagen für die Geodäsie selbst, zum Beispiel die Ausgleichsrechnung, die auf der Methode der kleinsten Quadrate basiert. Damit werden Daten mit ihren zufällig verteilten Fehlern so in einem Modell verarbeitet, dass die Ungenauigkeit minimiert wird und ein möglichst genaues Ergebnis herauspringt. Auch heute wird die Ausgleichsrechnung noch angewendet. Da stellt sich nach zweihundert Jahren vielleicht gezwungenermaßen die Frage: Reicht das?

## »Evolution statt Revolution«

»Wenn Gauss auf die Methoden von heute schauen würde, würde er das vielleicht schon als Revolution auffassen«, sagt Nico Sneeuw, Professor am Geodätischen Institut der Universität Stuttgart. »Die theoretischen Entwicklungen werden dadurch vorangetrieben, dass es inzwischen mehr und bessere Daten gibt.« Allerdings müsste Gauss vielleicht auch einfach nur ein wenig genauer hinschauen. »Das Erstaunliche ist, dass die alten Methoden wie die klassische Quadratausgleichung sich ausgezeichnet halten«, sagt Sneeuw. »Das sind Entwicklungen aus dem 19. Jahrhundert, die immer noch benutzt werden.«

Natürlich ergeben sich durch die verbesserte Datenlage neue Ansätze, wie Geodäten das Ganze anpacken können. Nico Sneeuw nennt das Beispiel der Schwerfeldmodellierung, für die Gauss die Kugelfunktionsmethodik ausgearbeitet hatte. »Die wird immer noch gerne benutzt«, sagt Sneeuw. »Allerdings ist die räumliche Auflösung inzwischen dermaßen hoch, dass man statt der globalen Kugelfunktionen eher eine lokale Parametrisierung wählt, um das Schwerfeld besser zu beschreiben.«

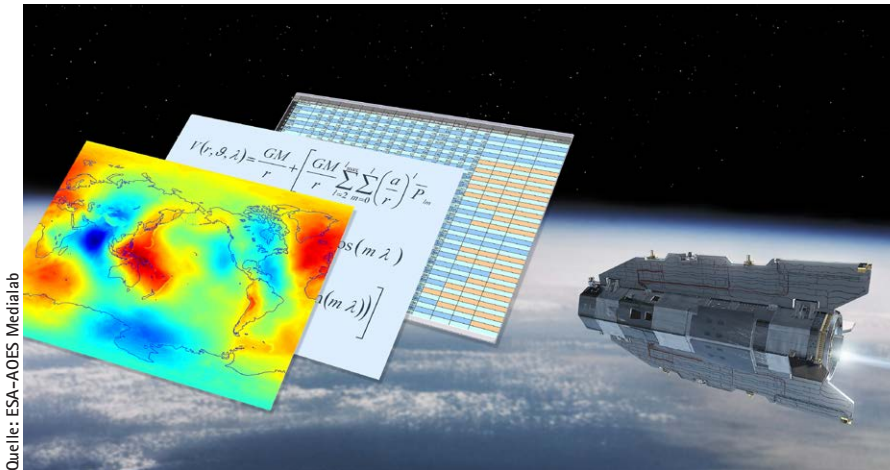


Eine Visualisierung der Schwerstörungen der Erde. Um diese so genau wie möglich zu berechnen, müssen Geodäten Daten und Messungen aus verschiedenen Quellen und mit verschiedenen Genauigkeiten in einem Modell vereinen. Quelle: IGG UniBonn

Laut Sneeuw passen sich die Methoden schrittweise der neuen Datenlage an. Er fasst es so zusammen: »Evolution statt Revolution.« Das ist vielleicht auch nicht verwunderlich, denn die Grundaufgabe der Geodäsie ist die Gleiche geblieben, nämlich eine möglichst genaue Vermessung der Erde. Auch deshalb können die grundlegenden Methoden durchaus gleich bleiben. In der Geodäsie gab es aber zwar schon immer mehr Messpunkte als Parameter für ein Modell, aber heutzutage ist die Redundanz noch sehr viel höher als bei den klassischen geodätischen Netzen. Die Einzelmessungen sind genauer. Somit kommen ganz neue Effekte ins Spiel, die beachtet werden müssen.

## Maßgeschneiderte Modelle

»Für mich ist Geodäsie Mathematik zum Anfassen«, sagt Wolf-Dieter Schuh von der Universität Bonn. Als Professor für Theoretische Geodäsie kennt er sich bestens mit hochkomplexen Modellen aus: Seine Gruppe hat innerhalb eines Konsortiums mit neun weiteren Universitäten und Forschungsinstituten Modelle für das globale Erdschwerfeld berechnet. Es beinhaltet eine unfassbare Datenmenge aus verschiedenen Quellen, hauptsächlich



Quelle: ESA-AOES Medialab

Der Satellit GOCE hat das Schwerefeld der Erde vermessen. Seine gesammelten Daten fließen in das Modell für das Schwerefeld der Erde ein. Bei den Berechnungen mussten Geodäten auch mögliche Störeffekte ausschließen, wie der Tatsache, dass sich der Satellit in einer sonnensynchronen Umlaufbahn befand.

der Satelliten GOCE und GRACE. Die Daten liegen in verschiedenen Auflösungen und mit verschiedenen Ungenauigkeiten behaftet vor und decken die gesamte Erde ab. So kommt man insgesamt auf die eingangs erwähnten 440 Millionen Beobachtungen und 100.000 Parameter.

»Es gibt einen Baukasten von Methoden, wie man diese unterschiedlichen Modelle zusammenbauen kann«, erklärt Schuh. Das ist allerdings nicht so einfach, wie es klingt, denn jedes Modell zunächst einzeln zu berechnen und anschließend zu kombinieren würde die Genauigkeit arg in Mitleidenschaft ziehen. »Wenn ich jedes Modell einzeln ausrechne, muss ich immer irgendwelche Annahmen machen«, sagt Schuh.

Deshalb rechnen die Geodäten das aus, was Schuh maßgeschneiderte Modelle nennt: integrierte Modelle, die die unterschiedlichen Beobachtungen und Effekte von Anfang an gleichzeitig modellieren. »Alle Informationen fließen hinein«, sagt Schuh, »sodass man ein Ergebnis mit seiner Unsicherheit erhält, welches aufzeigt, was wirklich gemessen wurde. Das Ergebnis spiegelt also nicht die Annahmen wider, die zur Berechnung von Zwischenmodellen eingeführt wurden.« Somit war es den Wissenschaftlern möglich, das Erdschwerefeld mit einer Genauigkeit von zwei Zentimetern weltweit zu berechnen. Dabei müssen auch immer die Unsicherheit bei solch einem integrierten Modell beachtet werden. Denn diese zwei Zentimeter sind der Mittelwert von hundert Kilometern, während ein einzelner Punktwert bis zu dreißig Zentimetern oder mehr davon abweichen kann.

Laut Schuh werden vor allem neue mathematische Modelle da erforderlich, wo gerade die großzügige Datenlage zum Hindernis werden kann. »Früher hat man Einzelmessungen gemacht. Jede steht für sich allein, hat eine bestimmte Genauigkeit und ist von anderen Messungen unabhängig«, erklärt er. »Aber inzwischen messen wir sehr schnell, vielleicht innerhalb von Millisekunden. Und Messungen innerhalb einer schnellen Abfolge von Zeit werden von ähnlichen Störeffekten beeinflusst.« Statt

voneinander unabhängigen Messungen erhält man somit miteinander korrelierte Messungen.

Schuh nennt das Beispiel des GOCE-Satelliten. Dieser befand sich in einer sonnensynchronen Umlaufbahn, er stieg also an der Tag-Nacht-Grenze der Erde stets nach Norden und an der Nacht-Tag-Grenze wieder nach Süden, damit seine Sonnenkollektoren stets mit genügend Energie versorgt wurden. Daher sah der Satellit aber stets dieselbe Atmosphäre, die sich am Abend vor allem in Hinblick auf magnetische Effekte völlig anders verhielt als am Morgen. Die Daten waren demnach stärker miteinander korreliert und die Geodäten

mussten dies dem Modell entsprechend mitteilen.

»Die Messungen haben alle ein Muster, wie sie miteinander zusammenhängen«, sagt Schuh. »Bei Satellitenmessungen können diese Störungen ungefähr doppelt oder sogar dreimal so groß sein wie das Signal selbst. Und das Signal dann erfolgreich rauszufiltern, ist ein Thema, das uns sehr beschäftigt.«

Eine weitere Herausforderung besteht darin, die Messreihen zu kontrollieren, um Unregelmäßigkeiten herauszufiltern, also eine gute Datenqualität sicherzustellen. »Die Zeitreihen so zu analysieren, um auffällige Daten zu finden, die nicht ganz zum System passen, ist momentan ein riesiges Thema«, sagt Schuh. Kleine Effekte, die man früher vielleicht vernachlässigen konnte, spielen bei steigender Genauigkeit eine Rolle, wie etwa Erdsatelliten zu unterschiedlichen Tageszeiten durch das Erdmagnetfeld beeinflusst werden oder GPS-Messungen aufgrund von Seitenreflexion gestört werden. »Wir haben bei uns im Keller ein Gravimeter stehen«, sagt Schuh. »Wenn hundert Meter weiter der Bus vorbeifährt, merken wir, ob er dort an der Haltestelle hält oder weiterfährt. Und wenn wir das eine Woche lang laufen lassen, haben wir in dieser Messreihe diese komischen Effekte drinnen, die wir im Modell beachten müssen.«

Es kommt ganz auf das Modell an, ob der Effekt herausgerechnet werden kann, ob die Genauigkeit dort niedriger ist oder ob man die Daten überhaupt nicht verwenden kann. Derartige Störeffekte ignorieren sollte man nicht.

Zwar musste sich Gauss weder mit vorbeifahrenden Bussen noch mit dem Magnetfeld der Erde herumschlagen. Er hatte aber damals auch einfach keine Geräte, die empfindlich genug gewesen wären oder schnell genug messen konnten, um derartige Effekte zu bemerken. Somit müssen heutige Geodäten ein wenig mehr Acht geben auf ihre Daten, damit ihre Modelle passen und die gewünschten hochpräzisen Ergebnisse liefern.

Kontakt: f.konitzer@gmail.com