

# Nutzung der globalen Optimierung mittels Intervall-Analyse zur Bestimmung von Wasseroberflächenhöhen aus GNSS-SNR-Daten

Jörg Reinking

## Zusammenfassung

Das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) von GNSS-Empfängern erlaubt die Berechnung von Höhen reflektierender Oberflächen mittels der Analyse der Interferenzmuster (IPT). In der klassischen IPT wird die Distanz zwischen der GNSS-Antenne und dem Reflektor aus einem Lomb-Scargle-Periodogramm (LSP) abgeleitet, das für jeden einzelnen Satelliten bestimmt wird. Anschließend werden die Einzelergebnisse zu einer Gesamtlösung kombiniert.

In einem verbesserten Ansatz können alle Daten aller Satelliten in einem gemeinsamen Auswerteschritt analysiert werden. Dazu wird die Berechnung des LSP durch ein Ausgleichungsmodell ersetzt, bei dem die Reflektorhöhe als Funktion von Zeit und Raum angesetzt werden kann. Die Quadratesumme der Residuen einer solchen Ausgleichung hängt von den Funktionsparametern ab und kann als Zielfunktion einer globalen Optimierung mittels Intervall-Analyse genutzt werden. An einem simulierten Datensatz, der aus realen Messungen auf der Weser abgeleitet wurde, wird dieses Verfahren dargestellt und es werden die Ergebnisse einer globalen Optimierung der Reflektorhöhe präsentiert.

## Summary

*The signal-to-noise ratio (SNR) from GNSS receivers allows computing the height of a reflecting surface by means of interference pattern technique (IPT). In classical IPT the distance between the GNSS antenna and the reflector is derived using a Lomb-Scargle periodogram (LSP) which is calculated for every satellite involved separately and the solutions are combined later.*

*An enhanced approach uses a consistent computation of the reflector height from all observations of all satellites in a single estimation step. This is achieved by replacing the LSP analysis by an appropriate common least squares adjustment for all satellites in which the reflector height could be expressed as a function in time and space. The cost function depends on the parameters of such a function and can be used as an objective function in a global optimization based on interval analysis. The method is demonstrated using a simulated data set derived from real measurements on the Weser River and the results of an optimization are presented.*

**Schlüsselwörter:** GNSS-SNR, globale Optimierung, Intervall-Analyse, Wasseroberflächenhöhen

## 1 Einleitung

Wasseroberflächen sind in der Regel sehr gute Reflektoren für Mikrowellensignale. Dieser Umstand führt zu meist unerwünschten Mehrweg-Effekten bei GNSS-Beobachtungen in der Nähe von oder auf Gewässern. Antennenhersteller versuchen daher mit großem Aufwand, reflektierte Signale von unterhalb des Antennenhorizontes gelegenen Reflektoren zu unterdrücken. Trotzdem erreicht ein Teil dieser Reflektionen doch das Antennenphasenzentrum und interferiert hier mit dem direkten GNSS-Signal. Das Interferenzmuster ist größtenteils abhängig von der geometrischen Anordnung des sendenden Satelliten, der Empfangsantenne und dem Reflektor. Allein durch die Bewegung des Satelliten ändert sich dieses Muster und führt zu einer charakteristischen Oszillation des Signal-Rausch-Verhältnisses (signal-to-noise ratio, SNR), das von vielen GNSS-Empfängern aufgezeichnet wird.

Die Oszillation der SNR-Daten hängt von verschiedenen äußeren und inneren Einflussfaktoren ab. Während langwellige Anteile hauptsächlich von den Antenneneigenschaften beeinflusst sind, werden die kurzwelligen Variationen im Wesentlichen durch Mehrwegausbreitung hervorgerufen. Bishop et al. (1985) und Georgiadou und Kleusberg (1988) haben dargelegt, dass die Mehrwegausbreitung abhängig vom Abstand zwischen dem Antennenphasenzentrum und einem horizontalen Reflektor unterhalb der Antenne ist. Wie Bilich et al. (2008) und Larson et al. (2008) bei der Bestimmung der Bodenfeuchtigkeit gezeigt haben, kann diese Reflektorhöhe aus den SNR-Daten von Standard-GNSS-Empfängern mittels der Analyse des Interferenzmusters (interference pattern technique, IPT) bestimmt werden. Die Methode wurde für die Bestimmung von Meereshöhen weiterentwickelt (Larson et al. 2012, Löfgren et al. 2011, Larson et al. 2013, Löfgren und Haas 2014, Roussel et al. 2015) und weltweit in diversen Gewässern angewendet (Löfgren et al. 2014).

Die Basis für die Anwendung der IPT ist eine Reduktion der SNR-Daten um langwellige Anteile durch eine Hochpassfilterung und eine Beschränkung der Daten mittels einer Elevations- und Azimutmaske, um Reflektionen von anderen Flächen als der Wasseroberfläche auszuschalten. Die vorprozessierten SNR-Daten, die hier in Anlehnung an Larson et al. (2012) mit  $\delta$ SNR bezeichnet werden sollen, werden üblicherweise mittels eines Lomb-Scargle-Periodogramms (LSP) (Lomb 1976, Scargle 1982) analysiert. Dabei werden die Daten jedes einzelnen Satel-

liten untersucht und die Ergebnisse später in einem zusätzlichen Schritt kombiniert. Die gewünschte Auflösung der Reflektorhöhe bestimmt dabei den Berechnungsaufwand, da das Leistungsspektrum des LSP für jede mögliche Reflektorhöhe berechnet werden muss.

Die ersten Konzepte für die Anwendung der IPT gingen von einer stationären und horizontalen Reflektorfläche aus. Da diese Annahme zumindest für Tidegewässer nicht haltbar war, wurden Methoden entwickelt, die die Oszillation als eine Funktion einer stationären Reflektorhöhe und einer Vertikalgeschwindigkeit beschreiben. Larson et al. (2013) und Löfgren et al. (2014) nutzen hierzu ein iteratives Verfahren, um eine vorläufige Zeitreihe der Höhen zu berechnen, aus der die Vertikalgeschwindigkeit bestimmt wird. Ein daraus abgeleiteter Korrekturterm wird in einer erneuten Berechnung berücksichtigt. Roussel et al. (2015) haben ein Verfahren vorgeschlagen, bei dem die Berechnung in Zeitfenstern durchgeführt wird, für die eine quasi-stationäre Oszillationsfrequenz angenommen werden kann. Die Ergebnisse der LSP der einzelnen Satelliten werden in einem gemeinsamen Ausgleichsmodell ausgewertet, bei der neben der stationären Reflektorhöhe auch eine Vertikalgeschwindigkeit berücksichtigt wird.

Diese Methoden liefern besonders durch ihren Näherungscharakter nur zum Teil gute Ergebnisse. Insbesondere für geringe Reflektorhöhen sind die Oszillationsfrequenzen sehr niedrig, sodass die Zeitfenster für eine zuverlässige LSP-Analyse vergrößert werden müssen. Dies führt leider gerade in Tidegewässern mit großem Tidehub dazu, dass weder eine geeignete Zeitreihe berechnet noch eine quasi-stationäre Oszillationsfrequenz angenommen werden kann. Daneben wird durch die nach Satelliten getrennte Auswertung des LSP bei diesen Verfahren nicht voll ausgenutzt, dass die Reflektorhöhe bei allen Daten zum gleichen Zeitpunkt und unter Annahme eines horizontalen Reflektors identisch sein muss.

Es wäre daher wünschenswert, die Frequenz als eine Funktion einer variablen Reflektorhöhe zu modellieren. Im einfachsten Fall könnte die Reflektorhöhe als eine zweidimensionale Funktion mit einem konstanten und einem zeitabhängigen Term dargestellt werden. Auch wenn ein solches Modell ebenfalls mittels LSP untersucht werden könnte, würde eine adäquate Auflösung für beide Terme zu kaum praktikablen Berechnungszeiten führen. Um dieses Problem zu umgehen, kann eine multivariate globale Optimierung mittels Intervall-Analyse (Hansen und Walter 2004) verwendet werden. In einem konsistenten Berechnungsschritt werden dabei alle  $\delta\text{SNR}$ -Werte aller Satelliten für eine gewichtete Ausgleichung in einem Gauß-Markov-Modell eingeführt. Da die gewichtete Summe der Residuenquadrate dem LSP-Leistungsspektrum vergleichbar ist (Mautz und Petrovic 2005), kann sie als eine Zielfunktion in einer globalen Optimierung genutzt werden.

In diesem Artikel soll die grundsätzliche Anwendung der globalen Optimierung bei der Analyse von SNR-Daten

dargestellt werden. Dabei wird der leicht auf multivariate Anwendungen erweiterbare Fall einer univariaten Funktion angenommen, wie er ähnlich bereits für andere Zwecke von Mautz und Petrovic (2005) dargestellt wurde. Im zweiten Kapitel werden die grundlegenden Gleichungen des Ausgleichsmodells, die daraus resultierende Zielfunktion und ihre Ableitungen hergeleitet und erläutert. Im dritten Kapitel wird kurz ein einfaches Konzept einer globalen Optimierung mittels Intervall-Analyse angegeben und es werden die notwendigen Anpassungen für die Anwendung zur Bestimmung der Reflektorhöhe gezeigt. Im vierten Kapitel wird das Potenzial dieses Verfahrens an einem numerischen Beispiel erläutert, das simulierte aber realitätsnahe Daten verwendet. Das letzte Kapitel fasst die Ergebnisse zusammen und gibt einen Ausblick auf zukünftige Entwicklungen und Anwendungen.

## 2 Zielfunktion

Die ungestörte kurzweilige Oszillation der  $\delta\text{SNR}$ -Werte eines Satelliten kann nach Larson et al. (2012) als eine Funktion der Wellenlänge des GNSS-Signals  $\lambda$ , des Elevationswinkels  $\theta$  des Satelliten, einer Amplitude  $A$  und einer Phase  $\phi$  sowie der Reflektorhöhe  $h$  ausgedrückt werden:

$$\delta\text{SNR} = A \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda} h \sin(\theta) + \phi\right). \quad (1)$$

Grundsätzlich repräsentiert (1) einen instantanen  $\delta\text{SNR}$ -Wert, der für einen einzelnen Ort der Reflektionsfläche zu einem speziellen Zeitpunkt gilt. Wenn diese Fläche, wie z. B. die Wasseroberfläche eines Tidegewässers, keine statische, horizontale Ebene ist, wird die Reflektorhöhe räumlich und zeitlich variieren. Soll (1) für ein solches Tidegewässer genutzt werden, muss die Reflektorhöhe mittels eines passenden physikalischen  $m$ -dimensionalen Modells mit den Funktionsparametern  $h_u$ ,  $u = 0, \dots, m - 1$  beschrieben werden.

Um die grundsätzliche Anwendung der globalen Optimierung für die Bestimmung der Reflektorhöhe darzustellen, soll hier von einer ebenen Wasseroberfläche mit einer linearen zeitlichen Änderung ausgegangen werden. Auch wenn eine Erweiterung für komplexere Modelle leicht möglich ist, wird die Reflektorhöhe zunächst als eine Funktion  $h(t)$  der Zeit  $t$  ausgedrückt:

$$h(t_i) = h_0 + h_1 t_i. \quad (2)$$

Hier repräsentiert  $h_0$  die Reflektorhöhe zum Zeitpunkt  $t_0$  und  $h_1$  die zeitliche Änderung der Reflektorhöhe. Wegen der variablen Relation der Signalstärke des direkten und des reflektierten Signals kann die Amplitude  $A$  in (1) auch zeitvariabel sein (Bilich et al. 2008) und könnte ebenfalls als eine entsprechende zeitabhängige Funktion ausgedrückt werden. Da die Amplitude allerdings nur sehr

langsam variiert, kann hier zur Vereinfachung ohne Qualitätsverlust eine zeitliche Konstanz angenommen werden.

Berücksichtigt man noch die zeitliche Abhängigkeit des Elevationswinkels, dann können die Beobachtungsgleichungen einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate für die  $n_k$  Daten der  $\delta\text{SNR}$ -Werte für alle  $s$  Satelliten zu den Beobachtungszeitpunkten  $t_{k,i}$  aus (1) unter Beachtung des Additionstheorems für den Kosinus abgeleitet werden zu

$$v_{k,i} + \delta\text{SNR}_{k,i} = a_k \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda_k} h(t_{k,i}) \sin(\theta_{k,i})\right) + b_k \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda_k} h(t_{k,i}) \sin(\theta_{k,i})\right). \quad (3)$$

Hier stellt  $v_{k,i}$  das Residuum der Ausgleichung dar, wobei  $k = 1, \dots, s$  mit  $s$  als Anzahl der beobachteten Satelliten und  $i = 1, \dots, n_k$  mit  $n_k$  als Anzahl der Beobachtungen zum speziellen Satelliten  $k$  sein soll. Die Parameter  $a_k = -A_k \sin(\phi_k)$  und  $b_k = A_k \cos(\phi_k)$  sind Kombinationen der Amplitude und Phase für den speziellen Satelliten  $k$ .

Die unbekannt Parameter  $a_k$  und  $b_k$  können gemeinsam mit den unbekannt Parametern der zeitabhängigen Funktion der Reflektorhöhe  $h_0$  und  $h_1$  aus einer gewichteten Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden. Da die Beobachtungen nichtlineare Funktionen der unbekannt Reflektorhöhe sind, müssen für eine geeignete Linearisierung gute Näherungswerte für die Funktionsparameter  $h_0$  und  $h_1$  vorliegen. Die Lösung einer linearisierten Ausgleichung muss allerdings nicht zwangsläufig bestimmbar sein, da die notwendige Iteration nicht konvergieren muss. Dazu liefert sie auch bei Konvergenz nicht generell ein globales Optimum.

Nimmt man hingegen die Funktionsparameter als gegeben an, sodass  $h \neq 0$  ist, dann können die Unbekannt  $a_k$  und  $b_k$  aus einer linearen Ausgleichung bestimmt werden. Unter der Annahme, dass die  $\delta\text{SNR}$ -Werte zwischen den Satelliten unkorreliert sind, kann die gewichtete Summe der Quadrate der Residuen einer solchen Ausgleichung als eine zu minimierende Zielfunktion einer globalen Optimierung verwendet werden:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} (a_1, b_1, \dots, a_s, b_s, h) = \sum_{k=1}^s \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k \quad (4)$$

mit  $\mathbf{P}_k$  als Gewichtsmatrix der Beobachtungen des Satelliten  $k$  und der üblichen Lösung der Ausgleichung mit

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix} = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{l}_k = \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{l}_k, \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k - \mathbf{l}_k, \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \delta\text{SNR}_{k,i}}{\partial a_k} & \frac{\partial \delta\text{SNR}_{k,i}}{\partial b_k} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l}_k = \begin{bmatrix} \vdots \\ \delta\text{SNR}_{k,i} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Die Funktionsparameter  $h_0$  und  $h_1$  können nun in einem definierten Wertebereich variiert und die Zielfunktion damit jeweils berechnet werden. Die Ergebnisse der verschiedenen Ausgleichungen können so wie das Leistungsspektrum des LSP genutzt werden, um die bestmögliche Reflektorhöhe zu bestimmen.

Die Abb. 1 zeigt ein Beispiel eines Datensatzes für drei Satelliten in einem Zeitraum von einer Stunde mit einer Beobachtungsrate von einer Sekunde. Die Reflektorhöhe wurde mit  $h = 5,5$  m als zeitlich konstant angenommen, wodurch die Optimierung zu einem univariaten Problem vereinfacht wird. Für den Beobachtungszeitraum wurde für alle Satelliten eine lineare Änderung der Elevationswinkel angenommen. Die Wertebereiche der Elevationswinkel wurden angenommen zu  $35^\circ$  bis  $64^\circ$  für Satellit 1,  $4^\circ$  bis  $30^\circ$  für Satellit 2 und  $6^\circ$  bis  $23^\circ$  für Satellit 3. Die Amplituden der Oszillationen wurden für alle Satelliten zu eins gesetzt und die Phasen mit null angenommen. Mit diesen Werten wurden die Beobachtungsdaten entsprechend (3) unter Vernachlässigung der Residuen berechnet.

Die Werte der Zielfunktion wurden für Reflektorhöhen zwischen 4 m und 6 m berechnet. Die Darstellung der Zielfunktionswerte in Abb. 1 zeigt eine minimale Summe der Quadrate der Residuen (in diesem Falle null) an der Position der vorab gesetzten Reflektorhöhe. Für diese als statisch angenommene Reflektorhöhe könnte erwartet werden, dass auch die Ansätze von Larson et al. (2013), Löfgren et al. (2014) und Roussel et al. (2015) ähnliche Ergebnisse erbringen. Allerdings werden dabei nicht alle Daten aller Satelliten in einem Zuge ausgewertet, sondern jeweils einzeln betrachtet. Zudem wäre eine Anpassung von (4) für eine komplexere zeitliche oder auch räumliche

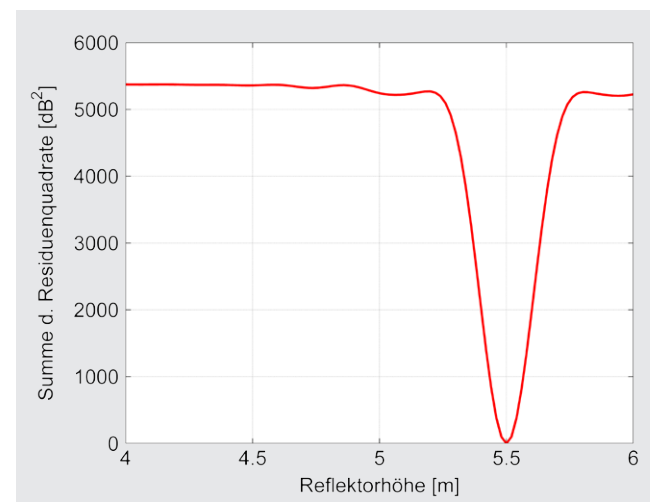


Abb. 1: Werte der Zielfunktion für den Beispieldatensatz dreier Satelliten

Variation in den erwähnten LSP-Ansätzen nicht leicht möglich.

Es sei hier angemerkt, dass für eine linearisierte Ausgleichungslösung von (3), bei der neben den Unbekannten  $a_k$  und  $b_k$  auch die Reflektorhöhe mit ausgeglichen wird, selbst bei einem recht guten Näherungswert für die Reflektorhöhe von z.B. 5 m auch nach 100 Iterationen keine Konvergenz erreicht wird. Dies ist sicher der Multimodalität der Zielfunktion im betrachteten Intervall und der geringen Trennschärfe einiger lokaler Minima geschuldet. Im ungünstigsten Fall könnte die Berechnung auch nur zum lokalen Minimum zwischen 5 m und 5,5 m konvergieren und damit eine falsche Lösung liefern.

Bei den LSP-basierten Ansätzen muss der gegebene Wertebereich vollständig durchsucht werden. Geht man von einer Auflösung von 1 cm für die Reflektorhöhe aus, müssen also mindestens 200 Berechnungen von (4) durchgeführt werden. Im Fall einer Reflektorhöhe, die entsprechend (2) als zeitlich variabel beschrieben wird, würde sich anstelle des 1D-Periodogramms in Abb. 1 ein 2D-Periodogramm ergeben. Entsprechend würde sich der Berechnungsaufwand nochmals deutlich erhöhen.

Wie Mautz und Petrovic (2005) dargestellt haben, kann für ein univariates Problem eine effizientere Lösung für eine globale Optimierung auf der Basis der Intervall-Analyse erarbeitet werden. Auch für multivariate Problemstellungen existieren Lösungen, die für eine Zielfunktion entsprechend (4) genutzt werden können. Ein Minimum der Zielfunktion ist grundsätzlich dadurch charakterisiert, dass dort der Gradientenvektor der Zielfunktion ein Null-Vektor ist:

$$\nabla \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial h_u} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (8)$$

Zur Vereinfachung wird hier von einer statischen Reflektorhöhe ausgegangen. Damit wird der Gradientenvektor eindimensional, da nur die Variable  $h$  zu bestimmen ist. Für den multivariaten Fall können die Elemente des Gradientenvektors ähnlich wie in den folgenden Herleitungen, allerdings unter Beachtung einer entsprechenden Indizierung der Parameter, gebildet werden.

Da die Zielfunktion (4) eine Summe der Zielfunktionen der  $s$  Satelliten ist, kann auch die partielle Ableitung als eine Summe dargestellt werden:

$$\frac{\partial \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\partial h} = \sum_{k=1}^s \frac{\partial \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k}{\partial h}. \quad (9)$$

Unter Berücksichtigung der Ableitungsregeln für Matrizen und Vektoren kann die partielle Ableitung ausgedrückt werden als

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k}{\partial h} = 2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}_k, \quad (10)$$

wobei die Matrix  $\mathbf{A}'_k = \frac{\partial \mathbf{A}_k}{\partial h}$  die partielle Ableitung der Elemente der Funktionalmatrix bezüglich der Unbekannten  $h$  enthält.

Neben der ersten partiellen Ableitung werden später auch die zweite und dritte partielle Ableitung benötigt. Wieder kann dabei von einer Summe entsprechend (9) ausgegangen werden. Für die zweite partielle Ableitung erhält man:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k}{\partial h^2} = 2 \left( \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \left( \mathbf{A}''_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'_k \right) + \mathbf{v}_k'^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}_k \right) \quad (11)$$

mit  $\mathbf{A}''_k = \frac{\partial^2 \mathbf{A}_k}{\partial h^2}$ . Die Ableitungen der Vektoren der Unbekannten und der Residuen können dabei ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{x}'_k = \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial h} = -\mathbf{Q}_{x_k} \left( \mathbf{A}_k'^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}_k \right), \quad (12)$$

$$\mathbf{v}'_k = \frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial h} = \mathbf{A}'_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{x}'_k. \quad (13)$$

Für die dritte partielle Ableitung erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k}{\partial h^3} &= 2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \left( \mathbf{A}'_k \mathbf{x}''_k + 2 \mathbf{A}''_k \mathbf{x}'_k + \mathbf{A}'''_k \mathbf{x}_k \right) \\ &\quad + 4 \mathbf{v}_k'^T \mathbf{P}_k \left( \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'_k + \mathbf{A}''_k \mathbf{x}_k \right) \\ &\quad + 2 \mathbf{v}_k''^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (14)$$

mit  $\mathbf{A}'''_k = \frac{\partial^3 \mathbf{A}_k}{\partial h^3}$ . Die zweiten Ableitungen der Vektoren der Unbekannten und der Residuen erhält man aus

$$\begin{aligned} \mathbf{x}''_k &= \frac{\partial^2 \mathbf{x}_k}{\partial h^2} \\ &= \mathbf{Q}_{x_k} \left( \mathbf{A}_k'^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \right) \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k'^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k \\ &\quad - \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k''^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k - \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k'^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}'_k \\ &\quad + \mathbf{Q}_{x_k} \left( \mathbf{A}_k'^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \right) \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}_k \\ &\quad - \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k'^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}_k - \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}''_k \mathbf{x}_k \\ &\quad - \mathbf{Q}_{x_k} \mathbf{A}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'_k, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{v}''_k = \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k}{\partial h^2} = \mathbf{A}''_k \mathbf{x}_k + \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'_k + \mathbf{A}'_k \mathbf{x}'_k + \mathbf{A}_k \mathbf{x}''_k. \quad (16)$$

Wie im folgenden Abschnitt erläutert wird, ist die Kenntnis der zweiten und dritten Ableitung der Zielfunktion wichtig für eine effiziente Anwendung der Intervall-Analyse zur globalen Optimierung eben dieser Zielfunktion.

### 3 Globale Optimierung

Zur Suche nach einem globalen Minimum für eine  $m$ -dimensionale Funktion in einer definierten  $m$ -dimensionalen Intervall-Box der Wertebereiche der Variablen werden sowohl probabilistische als auch deterministische Methoden verwendet. Die erste Gruppe wird dominiert von den Verfahren »Simulated Annealing« (Metropolis et al. 1953) und »Genetic Algorithms« (Holland 1975). Obwohl die Nutzung dieser Ansätze in vielen wissenschaftlichen Disziplinen sehr weit verbreitet ist, leiden sie doch darunter, dass sie wegen ihres stochastischen Charakters das Auffinden eines tatsächlich existierenden globalen Optimums nicht garantieren können. Die zweite Kategorie basiert auf den Ansätzen von Hansen (1979, 1980), der die von Moore (1966) entwickelte Intervallarithmetic verwendet. Theoretisch garantieren diese Verfahren das Auffinden eines Minimums in einer gegebenen Intervall-Box unter der Voraussetzung, dass mindestens ein solches Minimum in dieser Intervall-Box existiert. In der praktischen Umsetzung ist diese Garantie aus numerischen Gründen nicht voll gegeben, allerdings haben diese Verfahren auch dann noch eine sehr hohe Zuverlässigkeit beim Auffinden eines globalen Optimums gezeigt (Xu 2002).

Die globale Optimierung mittels Intervall-Analyse ist von vielen Wissenschaftlern weiterentwickelt und angewendet worden (Araya und Reyes 2015). Die meisten Algorithmen nutzen dabei eine Branch-and-Bound-Strategie, die originär von Land und Doig (1960) vorgeschlagen wurde. Obwohl eine Reihe von Weiterentwicklungen und Verbesserungen veröffentlicht wurden (Xu 2002, 2003; Beelitz 2006; Stöcker 2014), soll hier aus Gründen der Klarheit ein sehr einfacher Algorithmus verwendet werden.

Ein solcher Algorithmus beginnt mit der Definition einer Liste von  $m$ -dimensionalen Intervall-Boxen, die zumindest ein Minimum enthalten sollen. Zu Beginn wird diese Liste nur eine initiale Intervall-Box enthalten, die durch den Anwender wohldefiniert werden sollte. In der Regel sollten die Wertebereiche der Variablen dieser Intervall-Box sehr viel größer als ein definierter Schwellwert sein, der auch ein Abbruchkriterium für den Algorithmus darstellt und daher mit der gewünschten Auflösung verknüpft sein sollte.

In einem Bounding-Schritt werden die Eigenschaften einer Intervall-Box untersucht und entschieden, ob diese Intervall-Box von der Liste der Intervall-Boxen zu streichen ist. Falls die Intervall-Box nicht verworfen wurde, wird ein multivariates Newton-Intervall-Verfahren (Hansen und Greenberg 1983) angewendet, das ähnlich wie das bereits von Mautz und Petrovic (2005) vorgestellte eindimensionale Verfahren abläuft. Dabei werden entweder eine neue Intervall-Box oder zwei neue Intervall-Boxen erzeugt. Werden zwei Boxen erzeugt, dann wird die aktuelle Box durch eine der neuen Boxen ersetzt und die zweite neue Box wird der Liste der Intervall-Boxen zugefügt. Wird nur eine Box erzeugt, dann wird diese

entweder verworfen, wenn sie leer ist, oder sie ersetzt die aktuelle Intervall-Box, wenn sie kleiner als diese ist. Ist sie nicht kleiner, dann wird die aktuelle Box zerlegt (Branch-Schritt) in kleinere Boxen, von der eine die aktuelle Box ersetzt und die anderen der Liste der Intervall-Boxen zugefügt werden. Im Anschluss wird eine neue Box aus der Liste der Intervall-Boxen als aktuelle Box ausgewählt und der Algorithmus wird wiederholt durchlaufen. Dies wird solange durchgeführt, bis entweder die Liste der Intervall-Boxen leer ist (keine Lösung) oder die letzte verbleibende Box kleiner als das gesetzte Abbruchkriterium ist.

#### 3.1 Intervall-Analyse und Bounding-Schritt

Der beschriebene Algorithmus verwendet die Intervall-Analyse mittels Intervallarithmetic (Moore et al. 2009) im Bounding-Schritt zur Berechnung des Wertebereiches der Zielfunktion und ihrer Ableitungen. Alle Berechnungen nutzen dabei die grundlegenden Operationen der Intervallarithmetic für zwei Intervalle  $X$  und  $Y$  mit den unteren (»L« für »lower«) und oberen (»U« für »upper«) Intervallgrenzen  $x_L, x_U, y_L$  und  $y_U$ :

$$X \circ Y = \left[ \min \{x_L \circ y_L, x_L \circ y_U, x_U \circ y_L, x_U \circ y_U\}, \max \{x_L \circ y_L, x_L \circ y_U, x_U \circ y_L, x_U \circ y_U\} \right] \quad (17)$$

mit  $X = [x_L, x_U]$ ,  $Y = [y_L, y_U]$ . Das Symbol  $\circ$  steht dabei für einen der Operatoren der vier Grundrechenarten. Die Behandlung der Addition, Subtraktion und Multiplikation ist dabei sehr einfach. Für die Division muss allerdings berücksichtigt werden, dass ein Intervall auch Null als Wert enthalten kann. Daher muss die erweiterte Intervalldivision verwendet werden, um die resultierenden Intervallgrenzen korrekt bestimmen zu können (Chen 2011). Für praktische Anwendungen existieren eine Reihe von Softwarebibliotheken in verschiedenen Programmiersprachen und -umgebungen. Die Intervallberechnungen zu dieser Arbeit wurden mit der MATLAB-Bibliothek INTLAB (Rump 1999) durchgeführt. Es sei angemerkt, dass nicht alle Bibliotheken die erweiterte Intervalldivision berücksichtigen.

Es ist wohlbekannt, dass durch die Vernachlässigung von Abhängigkeiten die Intervallberechnung den Wertebereich von Funktionen sehr häufig überschätzt. Insbesondere im Fall der Zielfunktion (4) muss der Wertebereich aus der Durchführung sehr vieler Intervall-Operationen berechnet werden. Selbst für sehr kleine Intervall-Boxen führt die Überschätzung dann sehr häufig dazu, dass das Ergebnis-Intervall unendlich groß wird. Um dieses Problem zu reduzieren, kann eine Taylor-Entwicklung zur Berechnung der Intervallgrenzen einer  $m$ -dimensionalen Funktion  $f(\mathbf{x})$  des Vektors  $\mathbf{x}$  genutzt werden (Jaulin 2001):

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{x}_M) \\
 &+ \nabla f^T(\mathbf{x}_M)(\mathbf{X} - \mathbf{x}_M) \\
 &+ \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{x}_M)^T \mathbf{H}(\mathbf{X})(\mathbf{X} - \mathbf{x}_M) \dots, \quad (18)
 \end{aligned}$$

wobei  $f(\mathbf{X})$  der Wertebereich des Intervalls der Funktion,  $\mathbf{X}$  die  $m$ -dimensionale Intervall-Box und  $\mathbf{x}_M$  der Mittelpunkt der Intervall-Box  $\mathbf{X}$  ist. Für  $f(\mathbf{x}_M)$  wird der Funktionswert am Mittelpunkt  $\mathbf{x}_M$  bestimmt,  $\nabla f(\mathbf{x}_M)$  ist der Gradientenvektor der Funktion an diesem Mittelpunkt und  $\mathbf{H}(\mathbf{X})$  ist die Intervall-Hesse-Matrix der Funktion  $f$ .

Die bereits erwähnten Abhängigkeiten beeinflussen auch die Berechnung der Intervall-Hesse-Matrix. Daher ist es ratsam, für praktische Berechnungen eine Näherung anstelle von (18) zu verwenden:

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{X}) &\approx f(\mathbf{x}_M) \\
 &+ \nabla f^T(\mathbf{x}_M)(\mathbf{X} - \mathbf{x}_M) \\
 &+ \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{x}_M)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}_M)(\mathbf{X} - \mathbf{x}_M). \quad (19)
 \end{aligned}$$

Hier wird also die Hesse-Matrix am Mittelpunkt der Intervall-Box berechnet. Zwar wird die Überschätzung des tatsächlich kleineren Wertebereiches der Funktion nur reduziert und nicht verhindert, aber dennoch liegen die tatsächlichen Intervallgrenzen im berechneten Intervall.

Gleichung (19) kann jetzt auf die Zielfunktion und ihre Ableitungen angewendet werden. Der Wertebereich der Zielfunktion für eine Intervall-Box wird aus (4) in Verbindung mit (10) und (11) berechnet. Die Intervall-Box des Gradientenvektors in (8) kann ähnlich bestimmt werden. Dazu muss in (19) die Funktion  $f$  durch die Ableitung aus (10) für den entsprechenden Parameter  $h$  ersetzt werden. Der Gradientenvektor und die Hesse-Matrix müssen dann mit den zugehörigen zweiten und dritten partiellen Ableitungen aus (11) und (14) bestimmt werden.

Für den hier behandelten univarianten Fall reduzieren sich Gradientenvektor und Hesse-Matrix auf skalare Größen. Daher kann die Approximation auch direkt mit den Ableitungen aus (10), (11) und (14) angegeben werden. Für die einzelnen Summanden der Zielfunktion erhält man als Wertebereich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(\mathbf{h}) &\approx \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(h_M) \\
 &+ \frac{\partial \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(h_M)}{\partial h}(\mathbf{h} - h_M) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(h_M)}{\partial h^2}(\mathbf{h} - h_M)^2. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Für die Summanden der Ableitung der Zielfunktion erhält man als Intervall

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(\mathbf{h})}{\partial h} &\approx \frac{\partial \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(h_M)}{\partial h} \\
 &+ \frac{\partial^2 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(h_M)}{\partial h^2}(\mathbf{h} - h_M) \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \mathbf{v}_k^T \mathbf{P}_k \mathbf{v}_k(h_M)}{\partial h^3}(\mathbf{h} - h_M)^2. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathbf{h}$  das Intervall der Reflektorhöhe und  $h_M$  der Mittelpunkt dieses Intervalls. Auch hier wird durch die Taylor-Approximation nur die Überschätzung des tatsächlich kleineren Wertebereiches der Ableitungen reduziert. Entsprechende Erweiterungen auch für Taylor-Entwicklung höheren Grades sind problemlos möglich. Damit könnte die Überschätzung des tatsächlichen Wertebereiches der Abweichungen weiter reduziert und dadurch die Konvergenz der Optimierung verbessert werden. Für multivariate Probleme wie z.B. der Ansatz einer linearen Funktion entsprechend (2) ist dies allerdings nicht möglich, da hier die Näherung aus (19) benutzt werden muss.

Die Untergrenze des Intervalls der Zielfunktion aus (20) kann später in einem begrenzenden Cut-Off-Test benutzt werden. Wenn die Untergrenze größer als ein aktueller minimaler Wert der Zielfunktion ist, kann das zugehörige Intervall der Reflektorhöhe kein globales Minimum enthalten. Für einen Startwert kann der Wert der Zielfunktion am Mittelpunkt des initialen Intervalls verwendet werden. Der aktuell minimale Wert kann aktualisiert werden, wenn z.B. der Wert der Zielfunktion am Mittelpunkt des aktuellen Intervalls kleiner als das aktuelle Minimum ist.

Der Wertebereich der Ableitung aus (21) kann für einen Test auf Monotonie verwendet werden. Wenn das Vorzeichen der oberen und unteren Intervallgrenzen der Ableitung identisch ist, ist die Zielfunktion monoton und kann folglich kein Minimum enthalten.

### 3.2 Intervall-Newton-Verfahren

Wie auch von Mautz und Petrovic (2005) dargelegt wurde, kann basierend auf dem bekannten Newton-Verfahren zum Auffinden der Nullstellen einer Funktion eine Intervall-Version zum Auffinden aller Nullstellen in einem Intervall abgeleitet werden. Entsprechend ist das Intervall-Newton-Verfahren ebenfalls ein iteratives Verfahren, bei dem die neuen Intervallgrenzen aus den Informationen über den Funktionswert an einem speziellen Punkt im Intervall und dem Intervall des Gradientenvektors bestimmt werden. Im univariaten Fall wird das neue Intervall  $X_{new}$  aus dem aktuellen  $X$  bestimmt aus

$$\mathbf{X}_{new} = \mathbf{X} \cap \left( x_M - \frac{g(x_M)}{g'(\mathbf{X})} \right), \quad (22)$$

wobei  $x_M$  der Mittelpunkt des Intervalls,  $g(x_M)$  der Funktionswert am Mittelpunkt und  $g'(\mathbf{X})$  das Intervall der

ersten partiellen Ableitung der Funktion darstellt. Da hier die Zielfunktion minimiert werden soll, muss als Funktion  $g$  die Ableitung der Zielfunktion verwendet werden, da für dies die Nullstellen zu suchen sind. Die Division in (22) muss mittels der erweiterten Intervall-Division durchgeführt werden. Das Verfahren kann also ein neues Intervall oder zwei neue Intervalle liefern.

Dieses Verfahren kann auch für den multivariaten Fall verwendet werden, dabei ist allerdings der vollständige Gradientenvektor (8) zu verwenden. Die Ableitungen dieses Vektors liefern dann eine Jacobi-Matrix, die in diesem Fall aber eine Intervall-Matrix ist. Obwohl die Berechnung der Inversen einer Intervall-Matrix möglich wäre, wird für gewöhnlich die Inversion zur direkten Anwendung in (22) vermieden. Stattdessen wird (22) so umgestellt, dass ein Gleichungssystem entsteht, das mittels Gauß-Seidel-Verfahren gelöst wird (Hansen 1980, Hansen und Sengupta 1980).

### 3.3 Zerlegung von Intervall-Boxen

Je kleiner eine Intervall-Box ist, umso enger werden die Intervallgrenzen aus (22) berechnet. Da besonders zu Beginn der Berechnung die Intervall-Boxen häufig noch zu groß sind, um aus (19), (20) oder (21) akzeptable Näherungen zu erhalten, können viele Intervalle noch nicht verworfen oder weiter eingegrenzt werden. Die Intervall-Boxen müssen daher auch zerlegt werden können.

Die Zerlegung kann im einfachsten Fall dadurch erfolgen, dass jedes Intervall einer Komponente einer Intervall-Box halbiert wird. Für univariate Probleme oder multivariate Probleme geringer Dimension mag dieses Vorgehen akzeptabel sein, bei Funktionen höherer Dimension kann es aber zu einer enormen Anzahl neuer Unterboxen führen, die später ebenfalls analysiert werden müssen. Verschiedene Verfahren wurden daher entwickelt, die eine sinnvolle Zerlegung nur einer Komponente einer Intervall-Box ermöglichen. Eine umfassende Zusammenstellung solcher Bisektionstrategien findet sich in Beelitz (2006). Viele Verfahren verwenden dazu die relative Weite der Intervalle der Komponenten der Intervall-Box, andere berücksichtigen auch die Änderung der Zielfunktion durch die Komponenten basierend auf der Kenntnis des Gradientenvektors (8). Für den hier behandelten univariaten Fall wird eine einfache Halbierung gewählt.

### 3.4 Erster Test

Der oben beschriebene Algorithmus wurde in Form eines MATLAB-Skriptes realisiert. Dabei wurde zusätzlich implementiert, dass in jedem Durchlauf aus der Liste der Intervalle das größte Intervall als das aktuell zu untersuchende ausgewählt wird.

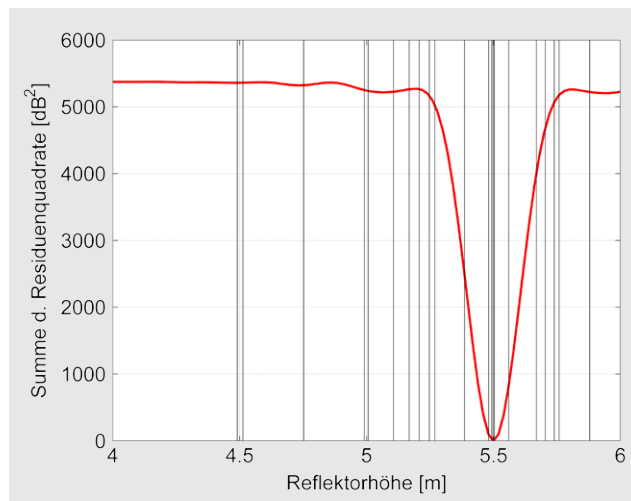


Abb. 2: Werte der Zielfunktion für den Beispieldatensatz mit den Grenzen der untersuchten Intervalle

Mit dieser Anwendung wurde das einfache Beispiel aus Kap. 2 prozessiert. Das Abbruchkriterium wurde entsprechend der in Kap. 2 gewählten Auflösung gesetzt. Die resultierenden Grenzen der analysierten Intervalle sind in Abb. 2 dargestellt. In den ersten Durchläufen werden die Intervalle fast nur halbiert und nur gering verkleinert. Offensichtlich wurden dann aber die großen Intervalle links von der initialen Intervallmitte früh verworfen und nicht weiter zerlegt. Je kleiner die Intervalle wurden, umso mehr wurden sie durch das Newton-Intervall-Verfahren begrenzt. Die meisten Intervalle (mehr als 73 %) wurden verworfen, weil sie den Cut-Off-Test nicht bestanden. Circa 20 % der Intervalle verfehlten den Test auf Monotonie und bei ca. 7 % liefert das Newton-Intervall-Verfahren ein leeres Intervall. Zur Bestimmung des Optimums waren insgesamt 15 Berechnungen von (4) notwendig. Selbst unter Berücksichtigung des zusätzlichen Berechnungsaufwands für die Intervall-Analyse ergibt sich also eine erhebliche Reduktion im Vergleich zu einem LSP-Ansatz.

## 4 Numerisches Beispiel

Grundsätzlich soll hier das Potenzial der globalen Optimierung mittels Intervall-Analyse für die Auswertung von SNR-Daten aufgezeigt werden. Reale Daten sind allerdings sehr häufig von systematischen Effekten beeinflusst, die nicht mit einem sehr simplen Modell erfasst werden können. Wie bereits erwähnt, müssen SNR-Daten zunächst hochpassgefiltert werden, um langwellige Einflüsse zu eliminieren, die nicht auf Signalreflektionen beruhen. Die Anwendung von Elevations- und Azimutmasken ist ebenfalls notwendig, um Reflektionen auszuschließen, die nicht von der Wasseroberfläche ausgehen. Beide Datenbearbeitungen könnten zur Kontamination der Daten mit Artefakten führen. Zusätzlich könnten die Rohdaten auch durch Schiffsverkehr (Schwell und Reflektion) oder durch Windwellen beeinflusst sein. Daher

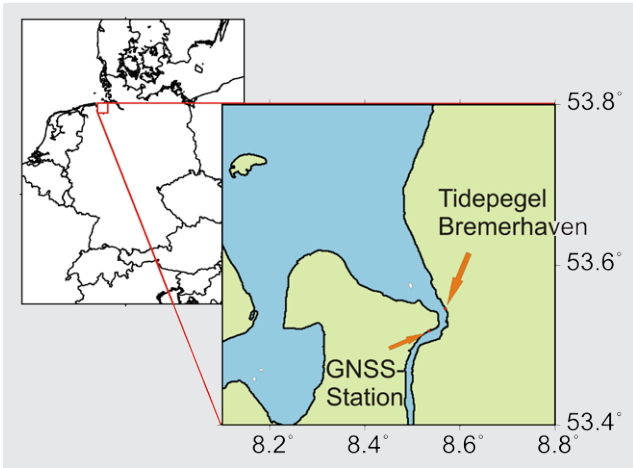


Abb. 3: GNSS-Station und Tidepegel in Bremerhaven

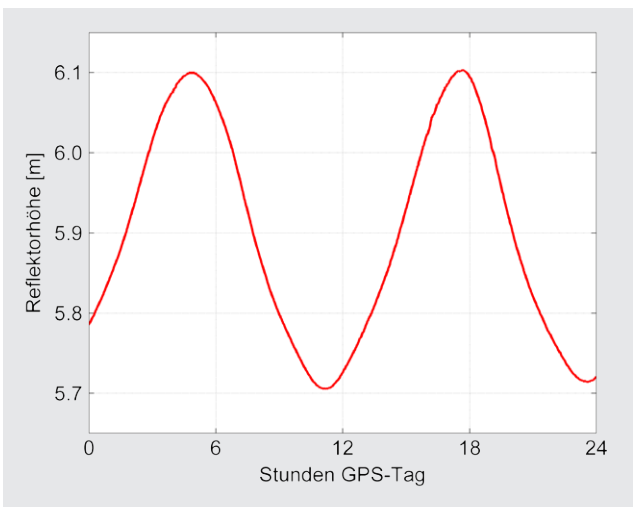


Abb. 4: Berechnete Reflektorhöhe an der GNSS-Station

wurde für diese Untersuchung ein simulierter Datensatz erzeugt, der aber so realistisch wie möglich angesetzt wird.

Dazu wurden die GNSS-Daten mit einer Aufzeichnungsrate von einer Sekunde einer Station an der Unterweser bei Nordenham (Abb. 3) für den 16. November 2013 gewählt. Die GNSS-Antenne (Leica AR20) wurde an einer Messplattform des WSA Bremerhaven installiert und an einem TopconNet-G3A-Empfänger betrieben. Die Höhe des Antennenphasenzentrums wurde mittels eigener Software aus den Phasen der GPS- und GLONASS-Daten im SAPOS-Referenznetz berechnet. Der nächstgelegene Tidepegel befindet sich in Bremerhaven (Alter Leuchtturm) in einer Entfernung von ca. 3,5 km, für den ein vollständiger Datensatz von Ablesungen im 1-Minuten-Abstand vorliegt. Der Tidehub in diesem Bereich beträgt ca. 4 m mit vertikalen Geschwindigkeiten von mehr als 1 m/h. Für ein einfaches univariates Modell der Reflektorhöhe sind diese Werte deutlich zu groß. Daher wurde für die Simulation der Tidehub mit dem Faktor 0,1 multipliziert und der gesamte Tidehub damit auf ca. 40 cm begrenzt. Diese Daten wurden gemeinsam genutzt, um zu jedem Beobachtungszeitpunkt eine Reflektorhöhe zu berechnen (Abb. 4).

Die originären GNSS-Daten von 55 Satelliten (31 GPS, 24 GLONASS) wurden entsprechend der Umgebung der Antenne maskiert. Die Daten wurden für die Auswertung akzeptiert, wenn die Elevation zwischen 1° und 25° lag und das Azimut zwischen 46° und 264° betrug. Zu Vergleichszwecken wurden die beobachteten SNR-Daten unter Verwendung eines Butterworth-Filters niedriger Ordnung hochpassgefiltert.

Die resultierenden  $\delta$ SNR-Daten wurden durch simulierte Werte ersetzt, die aus (1) berechnet wurden. Dabei wurde eine maximale Amplitude  $A_{\max}$  von +3 dB und eine Phase von null für jeden Satelliten angenommen. Nach Löffgren (2014) ist die Magnitude eines reflektierten Signals eine Funktion des Elevationswinkels  $\theta$  und sollte bei ansteigenden Elevationswinkeln zu geringeren Amplituden  $A(\theta)$  führen. Aus den dort angegebenen Daten für Seewasser wurde für die Reduktion der Amplitude ein einfaches Modell abgeleitet zu

$$A(\theta) = A_{\max} \cos(\theta) e^{-4\theta} \tag{23}$$

Die Reflektorhöhe wurde wie beschrieben berechnet und erreicht an diesem Tag Werte zwischen ca. 5,7 m und 6,1 m. Die  $\delta$ SNR-Werte wurden nach (1) berechnet mit der L1-Wellenlänge des GPS- bzw. GLONASS-Systems. Eine normalverteilte zufällige Abweichung mit einer Standardabweichung von 0,3 dB (also 10 % der maxi-

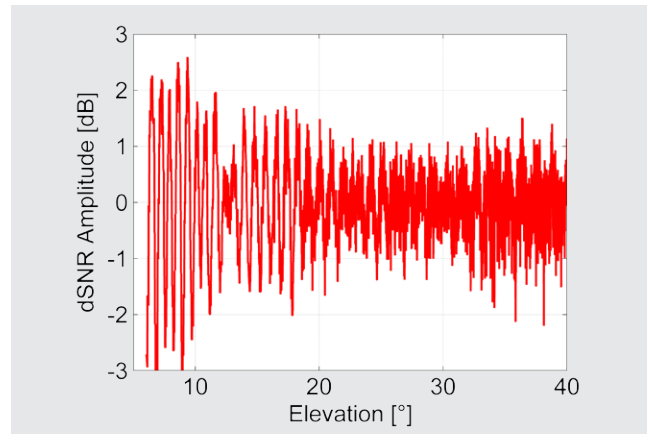


Abb. 5: Originäre  $\delta$ SNR-Daten eines GPS-Satelliten

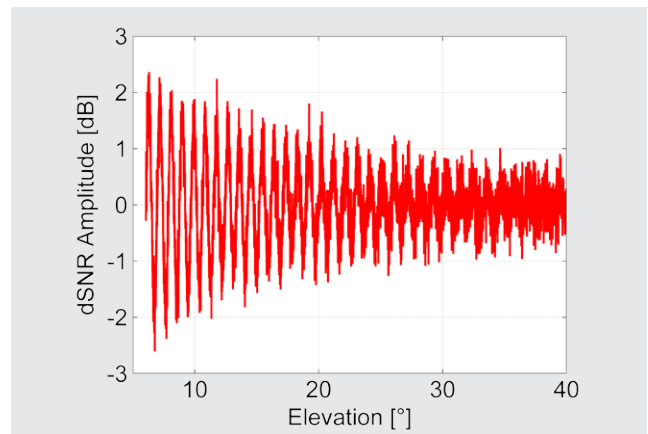


Abb. 6: Simulierte  $\delta$ SNR-Daten eines GPS-Satelliten



malen Amplitude) wurde den simulierten  $\delta\text{SNR}$ -Werten zugeschlagen. Als Vergleich wurden die originären und die simulierten Daten für einen GPS-Satelliten in Abb. 5 und Abb. 6 für einen Elevationswinkel bis  $40^\circ$  dargestellt. Offensichtlich zeigen die simulierten Daten keine Störeffekte wie z. B. in den originären Daten bei einer Elevation von ca.  $13^\circ$ . Für beide Datensätze wird für größere Elevationswinkel die Streuung der Daten im Verhältnis zur Amplitude recht groß. Es scheint daher angemessen, den Elevationswinkel auf  $25^\circ$  zu begrenzen.

Die simulierten Daten wurden mit dem bereits erwähnten MATLAB-Skript prozessiert, wobei die Reflektorhöhe als konstant angesetzt wurde und alle Beobachtungen als gleichgewichtet angenommen wurden. Da die tatsächliche Reflektorhöhe über den gesamten Messzeitraum variiert, wurden die Messungen in Zeitfenstern mit einer Dauer von 4 min berechnet. Insgesamt konnten für diesen Tag 352 Zeitfenster ausgewertet werden. Für alle Zeitfenster wurde das initiale Intervall für die Reflektorhöhe entsprechend des gesamten reduzierten Bereiches des Tidehubs zu 5,6 bis 6,2 m gesetzt.

Die Abb. 7 zeigt für das erste Zeitfenster die Werte der Zielfunktion mit den zugehörigen analysierten Intervallen. Das Minium der Zielfunktion bei 5,78 m wurde nach der Analyse von zwei Intervallen gefunden. Bei Nutzung eines LSP-Ansatzes wären hierfür 60 Auswertungen von (4) notwendig gewesen.

Die Abb. 8 zeigt die resultierende Reflektorhöhe zusammen mit den Differenzen zur simulierten Reflektorhöhe, die nur selten 5 cm überschreiten. Das Histogramm in Abb. 9 zeigt, dass die meisten Differenzen zwischen  $-3$  cm und  $+3$  cm liegen. Die zugehörige empirische Standardabweichung liegt bei 1,8 cm. Berücksichtigt man, dass das verwendete Modell einer statischen Reflektorhöhe auch für kurze Zeitfenster nur näherungsweise zutreffend ist, ist dieses Ergebnis vielversprechend.

## 5 Schlussbetrachtungen

Die Ergebnisse der hier dargestellten Untersuchung, bei der ein einfacher Algorithmus zur globalen Optimierung für die Auswertung der simulierten Daten verwendet wurde, zeigen, dass das Potenzial dieses Verfahrens recht hoch und erfolgversprechend ist und weitere Entwicklungen sinnvoll sind.

Es konnte für ein univariates Problem gezeigt werden, dass die Bestimmung der Reflektorhöhe aus SNR-Daten grundsätzlich mittels globaler Optimierung, die auf der Intervall-Analyse basiert, möglich ist. Die Anwendung für multivariate Probleme wird an anderer Stelle veröffentlicht. Besonders für diese multivariaten Probleme, bei denen die Reflektorhöhe sich nicht statisch verhält oder auch aus nicht-ebenen Reflektoren resultiert, könnte die globale Optimierung die Möglichkeit eröffnen, ein passendes Höhenmodell zu verwenden. Mit der dann anstei-

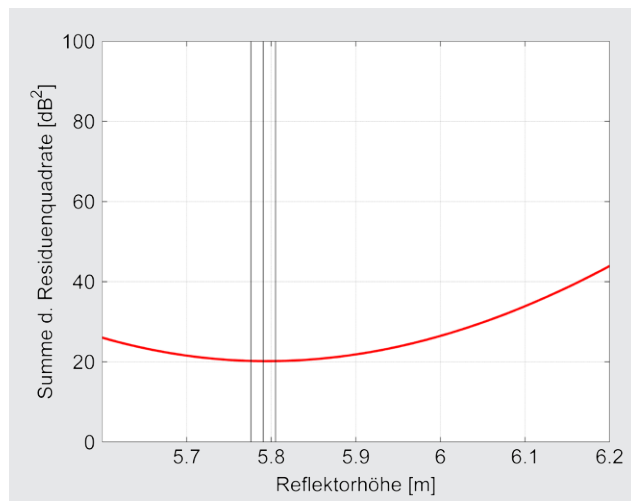


Abb. 7: Werte der Zielfunktion mit den analysierten Intervallen für das erste Zeitfenster

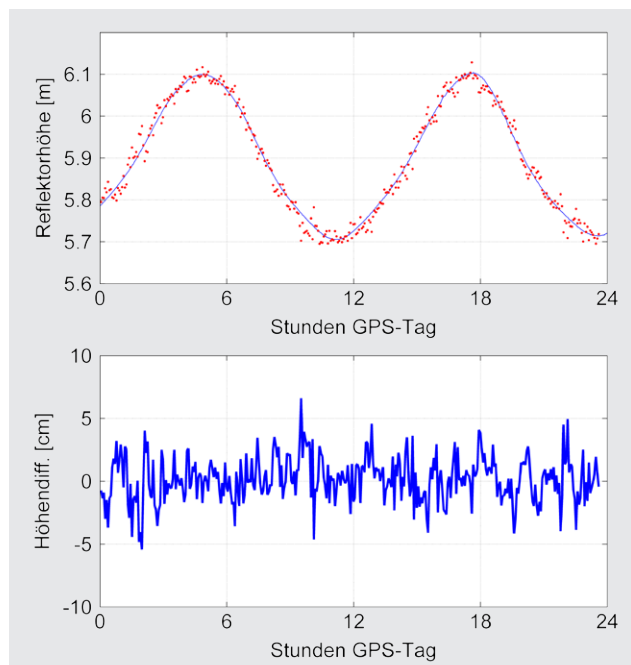


Abb. 8: Resultierende Reflektorhöhe und Differenzen zur simulierten Reflektorhöhe in einem Zeitfenster

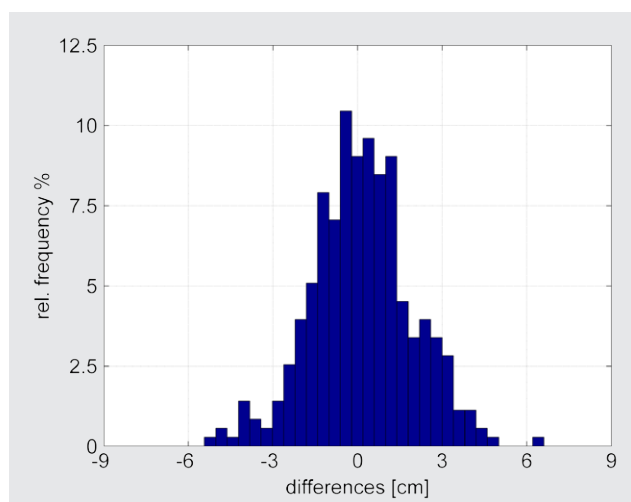


Abb. 9: Histogramm der Differenzen zur simulierten Reflektorhöhe

genden Dimension des Optimierungsproblems wächst allerdings auch der Berechnungsaufwand erheblich, sodass die Verwendung von weiterentwickelten und angepassten Optimierungsalgorithmen notwendig aber auch lohnenswert ist.

Die Daten wurden in kurzen zeitlichen Abschnitten bearbeitet, weil nur so eine näherungsweise statische Reflektorhöhe angenommen werden kann. Für reale Anwendungen geeignete Modelle müssen die Auswertung auch für längere Zeitabschnitte ermöglichen. Besonders für Gewässer mit starkem Tideeinfluss wäre der Ansatz von Tideparametern wünschenswert. Ein möglicher Ansatz könnte in der Anwendung einer sequentiellen Ausgleichung oder einer Kalman-Filterung bestehen.

Durch die Nutzung von simulierten Daten wurden einige systematische Effekte nicht berücksichtigt, die in der Realität auftreten können. Neben anderen Einflüssen haben Wellen erhebliche Auswirkungen auf das Verhalten der SNR-Werte. Roussel et al. (2015) haben gezeigt, dass der Seegang zu möglichen hochfrequenten Variationen der originären SNR-Daten führen kann. Möglicherweise könnten auf dieser Grundlage die Bestimmung von Seegangparametern in die Modellierung der Reflektorhöhe und die globale Optimierung integriert werden. Dazu sind weitere Untersuchungen notwendig.

## Literatur

- Araya, I., Reyes, V.: Interval Branch-and-Bound algorithms for optimization and constraint satisfaction: a survey and prospects. *J Glob Optim*. doi: 10.1007/s10898-015-0390-4, 2015.
- Beelitz, T.: Effiziente Methoden zum Verifizierten Lösen von Optimierungsaufgaben und Nichtlinearen Gleichungssystemen. Dissertation, Bergische Universität Wuppertal, 2006.
- Bilich, A., Larson, K.M., Axelrad, P.: Modeling GPS phase multipath with SNR: Case study from the Salar de Uyuni, Bolivia. *J Geophys Res*, 113, B04401. doi: 10.1029/2007JB005194, 2008.
- Bishop, G.J., Klobuchar, J.A., Doherty, P.H.: Multipath effects on the determination of absolute ionospheric time delay from GPS signals. *Radio Sci*, 20(3):388–396. doi: 10.1029/RS020i003p00388, 1985.
- Chen, C.Y.: Extended interval Newton method based on the precise quotient set. *Computing* 92(4):297–315, doi: 10.1007/s00607-011-0145-0, 2011.
- Georgiadou, Y., Kleusberg, A.: On carrier signal multipath effects in relative GPS positioning. *Manusc Geod* 13(3), 172–179, 1988.
- Hansen, E.: Global optimization using interval analysis: the one-dimensional case. *J Optim Theor Appl* 29(3), 331–344. doi: 10.1007/BF00933139, 1979.
- Hansen, E.: Global optimization using interval analysis: the multi-dimensional case. *Numerische Mathematik* 34(3), 247–270. doi: 10.1007/BF01396702, 1980.
- Hansen, E.R., Greenberg, R.I.: An interval Newton method, *Appl Math Comp*, 12(2), 89–98. doi: 10.1016/0096-3003(83)90001-2, 1983.
- Hansen, E., Sengupta, S.: Global constrained optimization using interval analysis. In: Nickel KL (ed), *Interval Mathematics*, Academic Press, New York, 1980, pp. 25–47, 1980.
- Hansen, E., Walster, G.W.: *Global optimization using interval analysis: 2nd edition, revised and expanded*, Monographs and textbooks in pure and applied mathematics, 264, Dekker, New York [u.a.], 2004.
- Holland, J.H.: *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. MIT Press, ISBN: 9780262581110, reprint 1992, 1975.
- Jaulin, L.: *Applied Interval Analysis: With Examples in Parameter and State Estimation*. Robust Control and Robotics, Springer, London 2001.
- Land, A.H., Doig, A.G.: An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3), 497–520. doi: 10.1007/978-3-540-68279-0\_5, 1960.
- Larson, K., Small, E.E., Gutmann, E., Bilich, A., Axelrad, P., Braun, J.: Using GPS multipath to measure soil moisture fluctuations: Initial results. *GPS solut*, 12(3), 173–177. doi: 10.1007/s10291-007-0076-6, 2008.
- Larson, K.M., Löfgren, J.S., Haas, R.: Coastal sea level measurements using a single geodetic receiver. *Adv Space Res* 51(10), 1301–1310. doi: 10.1016/j.asr.2012.04.017, 2012.
- Larson, K.M., Ray, R.D., Nievinski, F.G., Freymueller, J.T.: The Accidental Tide Gauge: A GPS Reflection Case Study From Kachemak Bay, Alaska. *IEEE Geosci Remote S* 10(5), 1200–1204. doi: 10.1109/LGRS.2012.2236075, 2013.
- Löfgren, J.: Local sea level observations using reflected GNSS signals. Dissertation. Chalmers University of Technology, 2014.
- Löfgren, J., Haas, R.: Sea level measurements using multi-frequency GPS and GLONASS observations. *EURASIP J Adv Sig Pr* 2014(1), 1687–1712. doi: 10.1186/1687-6180-2014-50, 2014.
- Löfgren, J., Haas, R., Scherneck, H.: Sea level time series and ocean tide analysis from multipath signals at five GPS sites in different parts of the world. *J Geodyn*, 80, 66–80. doi: 10.1016/j.jog.2014.02.012, 2014.
- Löfgren, J., Haas, R., Scherneck, H., Bos, M.: Three months of local sea level derived from reflected GNSS signals. *Radio Sci* 46(4). doi: 10.1029/2011RS004693, 2011.
- Lomb, N.R.: Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophys Space Sci* 39, 447–462. doi: 10.1007/BF00648343, 1976.
- Mautz, R., Petrovic, S.: Erkennung von physikalisch vorhandenen Periodizitäten in Zeitreihen. *zfv* 130 (3), S. 156–165, 2005.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A., Rosenbluth, M., Teller, A., Teller, E.: Equation of state calculations by fast computing machines. *J Chem Phys* 21 (1953) 1087–1092. doi: 10.1063/1.1699114, 1953.
- Moore, R.E.: *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- Moore, R.E., Kearfott, R.B., Cloud, M.J.: *Introduction to Interval Analysis*. SIAM. doi: 10.1137/1.9780898717716, 2009.
- Roussel, N., Ramillien, G., Frappart, F., Darrozes, J., Gay, A., Biancale, R., Striebig, N., Hanquiez, V., Bertin, X., Allain, D.: Sea level monitoring and sea state estimate using a single geodetic receiver. *Remote Sens Environ* 171, 261–277. doi: 10.1016/j.asr.2012.04.017, 2015.
- Rump, S.M.: *INTLAB – INTerval LABoratory*. In: Tibor Csendes (ed), *Developments in Reliable Computing*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, S. 77–104, 1999.
- Scargle, J.D.: Studies in astronomical time series analysis. II-Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *Astrophysical J* 263, 835–853, 1982.
- Stöcker, M.: *Globale Optimierungsverfahren, garantiert globale Lösungen und energieeffiziente Fahrzeuggetriebe*. Dissertation, Technischen Universität Chemnitz, 2014.
- Xu, P.: A hybrid global optimization method: the one-dimensional case. *J Comput Appl Math* 147(2), 301–314, doi: 10.1016/S0377-0427(02)00438-7, 2002.
- Xu, P.: A hybrid global optimization method: The multi-dimensional case. *J Comput Appl Math* 155(2), 423–446. doi: 10.1016/S0377-0427(02)00878-6, 2003.

## Anschrift des Autors

Prof. Dr.-Ing. Jörg Reinking  
 Institut für Mess- und Auswertetechnik, Jade Hochschule  
 Ofener Straße 16, 26121 Oldenburg  
 Tel.: +49 441 77083250  
 reinking@jade-hs.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter [www.geodaesie.info](http://www.geodaesie.info).