

# Total Least Squares?

Jörg Reinking

## Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Lösung eines Total Least Squares-Problems auf eine Least Squares-Lösung im Gauß-Markov-Modell zurückführt. Dieser Algorithmus ist leicht umsetzbar und mit geringem Aufwand in bestehende Software-Lösungen integrierbar. Zudem unterstreicht der gewählte Ansatz die von Neitzel und Petrovic (2008) aufgestellte Behauptung, dass die Total Least Squares-Lösung keine neue Ausgleichsmethode ist.

## Summary

*In this paper an algorithm is presented that describes the solution of a total least squares adjustment as a least squares solution. The algorithm can easily be applied and integrated into existing software solutions with minimal effort. Additionally, this ansatz emphasizes the argument of Neitzel and Petrovic (2008) that total least squares is not a new adjustment method.*

## 1 Einleitung

Wie Neitzel und Petrovic (2008) bereits dargelegt haben, hat sich in den vergangenen Jahren in vielen Bereichen, in denen Messdaten ausgewertet werden müssen, das Verfahren des »Total Least Squares« (TLS) soweit etabliert, dass die Anzahl der Veröffentlichungen zu diesem Thema schier unübersehbare Ausmaße angenommen hat. Grundidee bei diesem Verfahren ist es, die Parameter von ausgleichenden Funktionen unter der Berücksichtigung von fehlerbehafteten Funktionswerten und Variablen zu bestimmen. Im klassischen Ansatz von Golub und van Loan (1980) werden dazu nicht nur für die Beobachtungen, sondern auch für die Elemente der Funktionalmatrix Residuen zugelassen, so dass das funktionale Modell die gegenüber dem Least Squares-Lösung erweiterte Form

$$\mathbf{I}^* + \mathbf{v}_{I^*} = (\mathbf{A}^* + \mathbf{V}_{A^*}) \mathbf{x} \quad (1)$$

erhält, wobei  $\mathbf{v}_{I^*}$  den Vektor der zufälligen Residuen des Beobachtungsvektors  $\mathbf{I}^*$  und  $\mathbf{V}_{A^*}$  die Matrix der zufälli-

gen Residuen der Elemente der Funktionalmatrix  $\mathbf{A}^*$  darstellt. Für eine ausführliche Darstellung und eingehende Analyse der TLS-Lösung sei z. B. auf Kupferer (2005) verwiesen.

Auch in der Geodäsie gab und gibt es Ansätze, dieses Verfahren anzuwenden (z. B. Acar u. a. 2006, Kupferer 2005, Schaffrin 2007). Bei der praktischen Umsetzung der ursprünglichen Lösung mittels Singulärwertzerlegung (»singular value decomposition«, SVD) gibt es allerdings vielfach Probleme, die z. B. daraus resultieren, dass die Lösungswege vollständig nachvollzogen werden müssen, damit die korrekte Trennung zwischen konstantzuhaltenden und fehlerbehafteten Variablen bei gemischten Modellen gelingt. Daneben müssen z. T. neue Software-Pakete entwickelt werden, um dieses Verfahren in Standardanwendungen nutzen zu können. Dazu treten oft Probleme auf, bei denen Messungen vollbesetzte Kovarianzmatrizen aufweisen, die bei den üblichen TLS-Lösungen über SVD nur sehr schwer berücksichtigt werden können. Neueste Lösungen (Schaffrin, Wiesner 2008) erlauben zwar die Verwendung vollständiger Kovarianzmatrizen sowohl für die Beobachtungen als auch die Variablen der Funktionen, allerdings können Korrelationen zwischen diesen Werten noch nicht in die TLS-Lösung einbezogen werden.

Neitzel und Petrovic (2008) haben sehr deutlich dargestellt, dass TLS-Verfahren bereits durch die in der Geodäsie allgemein akzeptierte Gauß'sche »Methode der kleinsten Quadrate« (M. d. k. Q.) – oder auch »Least Squares« (LS) – abgedeckt werden. Diese Aussage soll im Folgenden bestätigt werden.

## 2 TLS-Problem als LS-Lösung

### 2.1 Lösung im Gauß-Markov-Modell

Ausgangspunkt der Lösung ist die Zusammenfassung aller beobachteten Größen zu dem Beobachtungsvektor  $\mathbf{l}$ . Die Funktion beschreibt also in impliziter Darstellung den funktionalen Zusammenhang zwischen den Vektoren der ausgeglichenen Beobachtungen (Variable bzw. Funktionswerte)  $\hat{\mathbf{l}}$  und der ausgeglichenen Unbekannten (Parameter)  $\hat{\mathbf{x}}$ , was zunächst zu einem Gauß-Helmert-Modell (GH-Modell) der Ausgleichung führt:

$$G_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) = 0 \quad \text{mit } i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

wobei  $m$  die Anzahl der funktionalen Zusammenhänge ist. Im Vergleich zu dem ursprünglich für lineare Fälle angesetzten klassischen TLS-Modell (1) umfasst der Beobachtungsvektor  $\mathbf{l}$  im GH-Modell also sowohl die Elemente des Vektors  $\mathbf{l}^*$  als auch die der Funktionalmatrix  $\mathbf{A}^*$  des Modells (1).

Nur in Sonderfällen lassen die Gleichungen (2) die direkte Bestimmung der Unbekannten zu. In den meisten

Fällen ist der funktionale Zusammenhang nichtlinear, so dass zur Lösung ein geeignetes Iterationsverfahren verwendet werden muss. Auch wenn andere Iterationsverfahren eine erhebliche Beschleunigung der Berechnung erwarten lassen (Lenzmann und Lenzmann 2007), soll hier der Übersichtlichkeit halber die Gauß-Newton-Iteration verwendet werden. Dazu müssen die Gleichungen zunächst linearisiert werden.

Die korrekte Linearisierung nach Taylor führt mit den Vektoren der Näherungswerte der ausgeglichenen Beobachtungen  $\mathbf{l}_0$  und der ausgeglichenen Unbekannten  $\mathbf{x}_0$  zu dem Ansatz

$$G_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0) + \sum_{j=1}^u \frac{\partial G_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial x_j} dx_j + \sum_{k=1}^n \frac{\partial G_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{l}_0)}{\partial l_k} dl_k = 0 \quad (3)$$

$$\text{bzw. } \mathbf{G}_0 + \mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{F}d\mathbf{l} = \mathbf{0} \quad (4)$$

mit  $d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0$  und  $d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{l}} - \mathbf{l}_0$  und  $u$  als Anzahl der Unbekannten bzw.  $n$  als Anzahl der Beobachtungen. Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{F}$  sind dabei die Jacobi-Matrizen der partiellen Ableitungen der funktionalen Zusammenhänge nach den unbekanntem Parametern bzw. Variablen, die mit den aktuellen Näherungswerten  $\mathbf{l}_0$  zu berechnen sind. Für die Berechnung von  $\mathbf{l}_0$  wird in jeder Iterationsstufe zum Beobachtungsvektor  $\mathbf{l}$  der Residuenvektor  $\mathbf{v}$  der vorhergehenden Iterationsstufe addiert. Dies deckt sich mit den von Bopp und Kraus (1977) sowie von Lenzmann und Lenzmann (2004) angegebenen Ansätzen zur strengen Lösung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells und dem von Neitzel und Petrovic (2008) dargestellten linearisierten Bedingungsgleichungen. Die differentiellen Werte  $dl_k$  werden dabei nicht als die Residuen der Beobachtungen angesehen und können daher im Laufe der Iteration – Konvergenz vorausgesetzt – entsprechend der Grundidee der Gauß-Newton-Iteration tatsächlich differentiell klein werden. Dies ist, wie Neitzel und Petrovic (2008) ebenfalls betonen, von entscheidender Bedeutung für die Berechnung korrekter Ergebnisse.

Da weiterhin  $\hat{\mathbf{l}} = \mathbf{l} + \mathbf{v}$  gilt, erhält man für (4)

$$\mathbf{G}_0 + \mathbf{A}d\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{l} + \mathbf{v} - \mathbf{l}_0) = \mathbf{0}. \quad (5)$$

Gleichung (5) lässt sich durch einfaches Umstellen in ein Gauß-Markov-Modell überführen:

$$-\mathbf{F}\mathbf{l} - (\mathbf{G}_0 - \mathbf{F}\mathbf{l}_0) - \mathbf{F}\mathbf{v} = \mathbf{A}d\mathbf{x}. \quad (6)$$

Fasst man nun zusammen

$$\mathbf{z} = -\mathbf{F}\mathbf{l}, \quad (7)$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{G}_0 - \mathbf{F}\mathbf{l}_0, \quad (8)$$

$$\mathbf{v}_z = -\mathbf{F}\mathbf{v}, \quad (9)$$

dann erhält man mit  $\mathbf{dz} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$  den linearisierten Ansatz

$$\mathbf{dz} + \mathbf{v}_z = \mathbf{A} \mathbf{d}\mathbf{x} . \quad (10)$$

Für die hergeleiteten Beobachtungen  $\mathbf{z}$  muss noch das stochastische Modell aufgestellt werden. Da  $\mathbf{z}$  entsprechend (7) berechnet wird, ergibt sich für die Gewichtsmatrix der hergeleiteten Beobachtungen für reguläre Probleme

$$\mathbf{P}_z = \mathbf{Q}_z^{-1} = (\mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T)^{-1} = (\mathbf{F} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F}^T)^{-1} \quad (11)$$

mit  $\mathbf{Q}$  als Kofaktormatrix und  $\mathbf{P}$  als Gewichtsmatrix der Beobachtungen  $\mathbf{l}$ .

Die zugehörige Gewichtsmatrix muss in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden. Dies kann bei umfangreichen Datensätzen und vollbesetzter Matrix  $\mathbf{Q}$  zu einem erheblichen Aufwand führen. Eine Reduzierung der notwendigen Iterationen kann z.B. durch das von Lenzmann und Lenzmann (2007) dargestellte Verfahren erreicht werden. Für spezielle Fälle kann auch, wie in den Beispielen gezeigt wird, eine erhebliche Vereinfachung genutzt werden. In jedem Falle bietet Gleichung (11) die notwendige Möglichkeit, auch vollbesetzte Kofaktormatrizen der Beobachtungen zu nutzen.

## 2.2 Bezug zur Methode der kleinsten Quadrate

Die Umkehrung von (9) findet man aus einem Vergleich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_z &= \mathbf{Q}_z \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z \\ &= \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z , \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{Q} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z . \quad (13)$$

Mit (11) und (13) geht die übliche Minimumbedingung der M. d. k. Q. für reguläre Probleme über in

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_z^T \mathbf{P}_z \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z \\ &= \mathbf{v}_z^T \mathbf{P}_z \mathbf{F} \mathbf{Q} \mathbf{F}^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z \\ &= \mathbf{v}_z^T \mathbf{P}_z \mathbf{v}_z \Rightarrow \min. \end{aligned} \quad (14)$$

Da die Jacobi-Matrix  $\mathbf{F}$  die partiellen Ableitungen nach den Variablen enthält, werden die Beobachtungen auf die Normale der Funktion an der Stelle  $\mathbf{l}_0$  projiziert und mit (14) die gewichteten Abstände der Stelle  $\mathbf{z}$  von der Funktion minimiert. Dabei beschreiben die Werte des Residuenvektors  $\mathbf{v}_z$  nicht direkt die Abstände zur Funktion, da dazu die Zeilen der Jacobi-Matrix  $\mathbf{F}$  noch durch die jeweilige Länge der Normalen dividiert werden müssten. Da dies aber für beide Seiten der Gleichung (10) durchgeführt werden muss, erübrigt sich diese Division. Die ausgeglichenen Beobachtungen  $\mathbf{z} + \mathbf{v}_z$  sind dann die Fußpunkte der Lote der Beobachtungen  $\mathbf{z}$  auf die Funktion.

Mit (14) ergibt sich die Lösung für Gleichung (10) aus

$$\mathbf{d}\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{d}\mathbf{z} . \quad (15)$$

Diese Lösung entspricht für den einfachen Fall einer ausgleichenden Gerade der von Schaffrin (2007) vorgeschlagenen Vereinfachung des von Reinking (2001) angegebenen Algorithmus. Nach entsprechender Umformung kann auch die von Neitzel und Petrovic (2008) angegebene Lösung in diese Form überführt werden.

Gleichung (6) und Lösung (15) finden sich in ähnlicher Form auch bereits auf den englischsprachigen Seiten in Wikipedia unter dem Beitrag »Total Least Squares« (Wikipedia 2008). Allerdings ist hier, wie so oft auf den Seiten dieser Internet-Enzyklopädie, die Darstellung nicht völlig fehlerfrei, da die Behandlung der Kofaktormatrix der Beobachtungen nicht allgemeingültig ist.

Das hier dargestellte Vorgehen, aus ursprünglichen Beobachtungen hergeleitete Beobachtungen zu erzeugen und diese mit der korrekt berechneten Kofaktormatrix in eine Ausgleichung entsprechend des Gauß-Markov-Modells einzuführen, ist gängige Praxis in der Geodäsie. Bei der Auswertung von GPS-Phasenmessungen werden z.B. häufig Doppeldifferenzen gebildet, für die hergeleitete Kofaktormatrizen verwendet und für die Berechnung ausgeglichener Koordinatendifferenzen genutzt werden. Da diese Lösungen der M. d. k. Q. entsprechen, ist die TLS-Lösung nicht als eigenständiges Ausgleichungsverfahren, sondern als eine Untergruppe der LS-Lösung zu sehen.

Die Lösung (15) ist besonders hinsichtlich ihrer programmtechnischen Umsetzung von Bedeutung, da bereits bestehende Software-Pakete ohne großen Aufwand erweitert und die darin genutzten Optimierungen hinsichtlich z.B. der Inversion der Normalgleichungsmatrix oder der Lösung der Normalgleichungen weiterhin angewendet werden können. Auch die Einführung zusätzlicher Bedingungen, z.B. für die Datumsfestlegung, bereitet keine Schwierigkeiten.

Für den Fall, dass die funktionalen Zusammenhänge die einfache Struktur

$$G_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) = H_i(\hat{\mathbf{x}}) - \mathbf{l}_i = 0 \quad \text{mit } i = 1, \dots, m \quad (16)$$

aufweisen, was z. B. für die meisten Fälle der Netzausgleichung gültig ist, ergibt sich

$$\mathbf{G}_0 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = -\mathbf{E} \quad \text{mit } \mathbf{E} \text{ als Einheitsmatrix} \quad (17)$$

und damit

$$\mathbf{d}\mathbf{z} = \mathbf{d}\mathbf{l} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_z = \mathbf{P} . \quad (18)$$

Dadurch geht Lösung (15) über in die bekannte Form:

$$\mathbf{d}\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{d}\mathbf{l} . \quad (19)$$

### 3 Beispiele

Die klassische TLS-Lösung geht von einem linearen funktionalen Modell wie z. B. in Schaffrin und Wiesner (2008) aus. Für die dort angegebenen Beispiele liefert der hier dargestellte Ansatz identische Ergebnisse. Liegen nicht-lineare Problemstellungen vor, muss zunächst eine Linearisierung vorgenommen werden, wobei der TLS-Ansatz, wie Kupferer zeigt, nur unter speziellen Bedingungen eine erwartungstreue Schätzung liefert. Da in der geodätischen Praxis aber sehr häufig nichtlineare Problemstellungen auftreten, soll an zwei Beispielen gezeigt werden, dass sich mit einem wie hier beschriebenen Ansatz im Gauß-Markov-Modell Ergebnisse berechnen lassen, die erwartungstreu sind und dem Grundgedanken des TLS-Ansatzes entsprechen.

#### 3.1 Ausgleichende quadratische Funktion

Im Rahmen eines interdisziplinären Forschungsprojektes zur Schiffsdynamik wurden an der FH Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven Messungen der dynamischen Tiefgangsänderung (Squat) und der damit verbundenen dynamischen Trimmänderung von in Fahrt befindlichen Schiffen auf der Unterweser durchgeführt (Reinking und Härtling 2007). Zum Vergleich der Ergebnisse der realen Messungen mit denen numerischer Modellierungen oder Messungen im hydraulischen Modell müssen die vorhandenen Datensätze generalisiert werden. Dazu sollen die gemessenen dynamischen Trimmänderungen ( $\mathbf{t}$ ) durch eine einfache quadratische Funktion der ebenfalls gemessenen Geschwindigkeiten des Schiffes durch das Wasser ( $\mathbf{s}$ ) für eine feste Wassertiefe von 15 m beschrieben werden:

$$\hat{t}_i = \hat{b} \cdot \hat{s}_i^2. \quad (20)$$

Dieser Ansatz entspricht dem von Lenzmann und Lenzmann (2007) gewählten Beispiel. Insgesamt liegen hier für die Berechnung des ausgeglichenen Parameters 1800 Messwerte vor. Ein Ansatz entsprechend Reinking (2001) oder Lenzmann und Lenzmann (2007) würde, wie Schaffrin (2007) zu Recht kritisiert, zu einem extrem großen Normalgleichungssystem führen. Möglicherweise ergeben sich über eine Diagonalisierung einige Vereinfachungen hinsichtlich der Lösung des Normalgleichungssystems, allerdings muss für den hier angegebenen Ansatz dieser Aufwand nicht betrieben werden.

Für den funktionalen Zusammenhang ergibt sich:

$$G_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{1}}) = \hat{b} \cdot \hat{s}_i^2 - \hat{t}_i. \quad (21)$$

Mit der Anordnung

$$\mathbf{1}^T = [\dots s_i \dots t_i \dots] \text{ und}$$

$$\mathbf{1}_0^T = [\dots s_{i0} \dots t_{i0} \dots]$$

ergibt sich für die  $i$ -te Zeile der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{F}$  bzw. den Vektor  $\mathbf{G}_0$

$$\mathbf{A}_i = [s_{i0}^2], \quad (22)$$

$$\mathbf{F}_i = [\dots 2 \cdot b_0 \cdot s_{i0} \dots - 1 \dots], \quad (23)$$

$$\mathbf{G}_{0i} = [b_0 \cdot s_{i0}^2 - t_{i0}]. \quad (24)$$

Die Beobachtungen können als unkorreliert angenommen werden, da die Daten unabhängig voneinander bestimmt wurden. Die Standardabweichung der Messungen werden angenommen zu

$$\sigma_t = 0,01^\circ, \quad \sigma_s = 0,05 \text{ m/s}, \quad (25)$$

wobei für die a-priori-Standardabweichung  $\sigma_0 = \sigma_s$  gesetzt wird. Für die Kofaktormatrix der Beobachtungen erhält man also eine Diagonalmatrix mit

$$\text{diag}(\mathbf{Q}) = [\dots 1 \dots \sigma_t^2 / \sigma_s^2 \dots]. \quad (26)$$

Mit (23) und (26) ergibt sich nun entsprechend (11) die einfach zu berechnende Gewichtsmatrix

$$\text{diag}(\mathbf{P}_z) = \left[ \dots \frac{1}{4 \cdot b_0^2 \cdot s_{i0}^2 + \sigma_t^2 / \sigma_s^2} \dots \right]. \quad (27)$$

Die Normalgleichungsmatrix hat dann die einfache Form

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P}_z \mathbf{A} = \left[ \sum_{i=1}^m \frac{s_{i0}^4}{4 \cdot b_0^2 \cdot s_{i0}^2 + \sigma_t^2 / \sigma_s^2} \right]. \quad (28)$$

Mit den Startwerten

$$\begin{aligned} s_{i0} &= s_i, \\ t_{i0} &= t_i \text{ und} \\ b_0 &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

erhält man nach acht Iterationen ein numerisch auf 15 Stellen stabiles Ergebnis. Die Daten und die resultierende quadratische Funktion sind in Abb. 1 dargestellt.

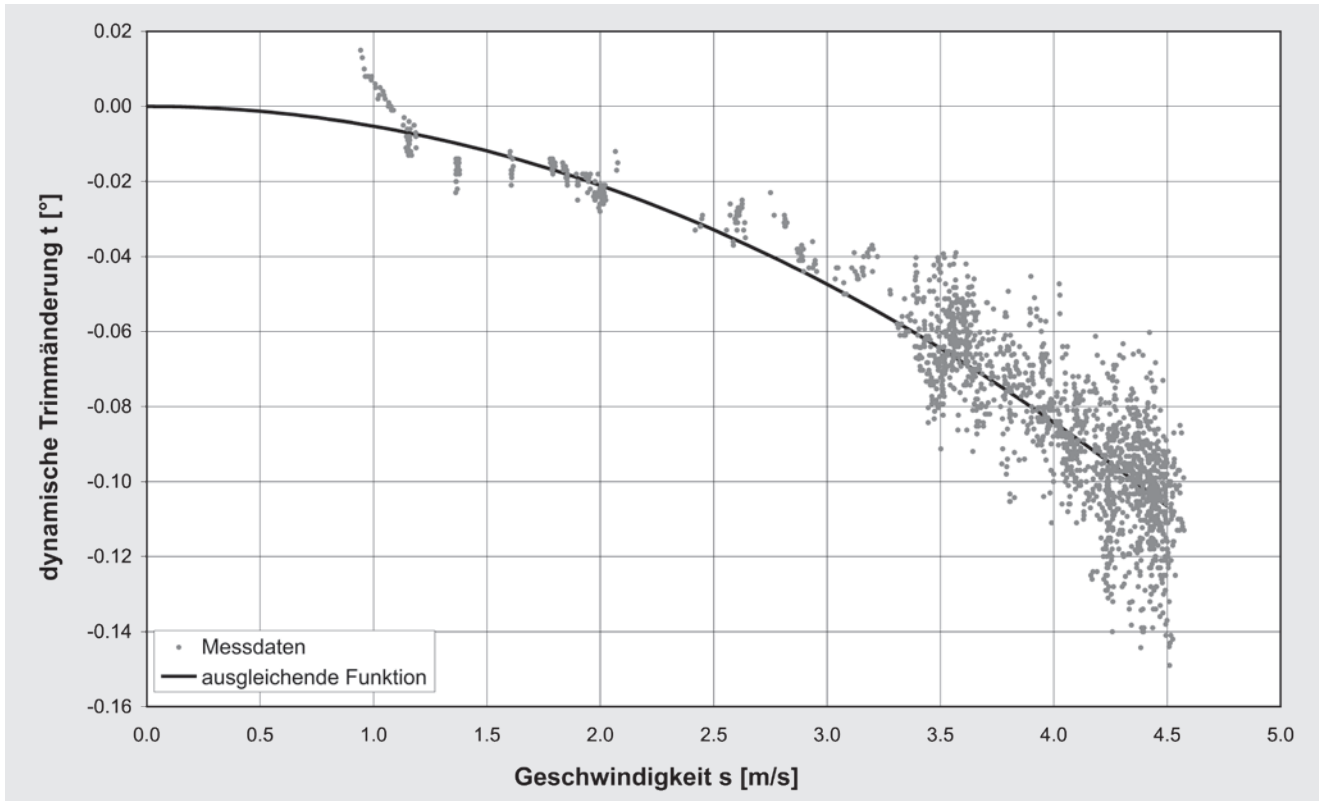


Abb. 1: Dynamische Trimmänderung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit

### 3.2 Netzausgleichung mit »weicher Lagerung«

Die Netzausgleichung mit »weicher Lagerung« oder auch »schwachem Datum« (Niemeier 2002, Schaffrin 1985) ist ein Beispiel für die bereits vorhandene Anwendung der Grundidee des TLS-Ansatzes in der Geodäsie. Dabei geht man davon aus, dass für die Koordinaten bekannter Punkte stochastische Informationen vorliegen, die im Rahmen einer Ausgleichung berücksichtigt werden sollen. Die Koordinaten dieser Punkte werden dabei nicht festgehalten, sondern mit ausgeglichen. Die üblicherweise benutzten Ansätze entsprechen hierbei dem von Reinking (2001) dargestellten Verfahren.

Im Zusammenhang mit der Ausgleichung geodätischer Netzbeobachtungen hat Kupferer (2005) deutlich dargestellt, dass die Anwendung des TLS-Ansatzes nicht zu einer erwartungstreuen Schätzung der Parameter führt. Demzufolge kann mit dem TLS-Ansatz, auch wenn hier die Grundidee des Total Least Squares-Verfahrens, nämlich dass auch die Variablen, hier also die Koordinaten der Datumpunkte, mit Residuen behaftet sind, keine erwartungstreue Lösung gefunden werden.

Gegeben sei das in Abb. 2 dargestellte kleine Netz aus drei bekannten Punkten 1, 2 und 3 und einem zu bestimmenden Neupunkt N. Auf dem Neupunkt seien die unkorrelierten Strecken zu den bekannten Punkten gemessen, die Standardabweichung der Messungen betrage 5 mm.

Die Varianz-Kovarianz-Matrix der Koordinaten  $\Sigma_p$  der Punkte sei für jeden Punkt identisch und gegeben durch

$$\Sigma_p = \sigma_p^2 \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_p^2 \begin{bmatrix} q_{yy} & q_{yx} \\ q_{xy} & q_{xx} \end{bmatrix} \text{ mit } \sigma_p = 5 \text{ mm} . \quad (30)$$

Die Punkte untereinander seien unabhängig, so dass für die Varianz-Kovarianz-Matrix der Koordinaten

$$\Sigma_{yx} = \begin{bmatrix} \Sigma_p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \Sigma_p \end{bmatrix}$$

gilt.

Wählt man den von Niemeier (2002) dargestellten Ansatz, so muss in jedem Iterationsschritt die  $8 \times 8$ -Normalglei-

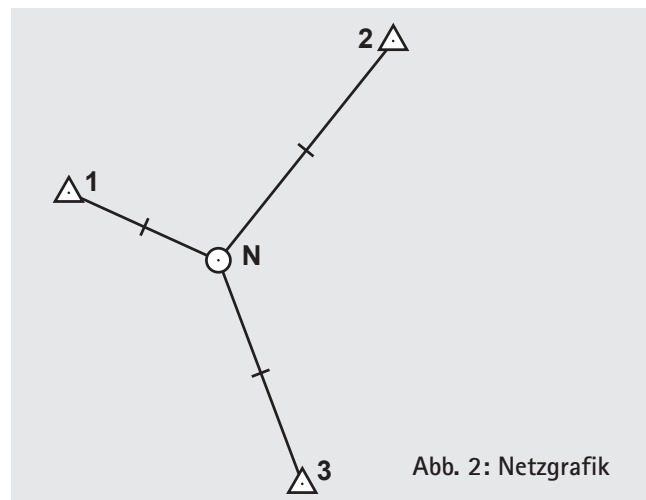


Abb. 2: Netzgrafik

Tab. 1: Näherungswerte und Messungen

Punkt	y [m]	x [m]	Strecke zu N [m]
1	528.76	440.27	85.350
2	697.31	518.85	145.503
3	650.23	288.64	124.397
N	606.50	405.10	–

Tab. 2: Ausgeglichene Koordinaten

Punkt	y [m]	x [m]
1	528.7623	440.2708
2	697.3065	518.8463
3	650.2312	288.6428
N	606.5417	405.1197

chungsmatrix invertiert werden. Nach zwei Iterationen liegt das in Tab. 2 angegebene numerisch auf zehn Stellen stabile Ergebnis vor.

Für den hier beschriebenen Ansatz lauten die funktionalen Zusammenhänge

$$G_i(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{l}}) = \sqrt{(\hat{y}_i - \hat{y}_N)^2 + (\hat{x}_i - \hat{x}_N)^2} - \hat{s}_i \quad (31)$$

für die Streckenmessung  $s_i$  von Punkt N nach Punkt i. Mit der Anordnung

$$\mathbf{I}^T = [\dots y_i \quad x_i \quad \dots s_i \quad \dots] \text{ und}$$

$$\hat{\mathbf{x}}^T = [\hat{y}_N \quad \hat{x}_N]$$

ergibt sich für die i-te Zeile der Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{F}$  bzw. den Vektor  $\mathbf{G}_0$

$$\mathbf{A}_i = [-\sin t_{N,i} \quad -\cos t_{N,i}], \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_i = [\dots \sin t_{N,i} \quad \cos t_{N,i} \quad \dots -1 \quad \dots], \quad (33)$$

$$\mathbf{G}_{0i} = [0]. \quad (34)$$

Für die a-priori-Standardabweichung wird  $\sigma_0 = 5 \text{ mm}$  gesetzt.

Mit diesen Werten erhält man für die Kofaktormatrix der Beobachtungen eine Diagonalmatrix mit

$$\text{diag}(\mathbf{Q}) = [\dots 1, 4 \sin^2 t_{N,i} \cos^2 t_{N,i} + 2 \dots]. \quad (35)$$

Bei der Berechnung erhält man in jedem Iterationsschritt exakt die gleichen Werte wie bei dem Ansatz einer »weichen Lagerung«. Allerdings reduziert sich der Berechnungsaufwand erheblich, da jetzt in jedem Iterationsschritt nur eine  $2 \times 2$ -Normalgleichungsmatrix invertiert werden muss und die Berechnung der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_Z$  sehr leicht möglich ist.

## 4 Schlussbemerkungen

Es wurde dargestellt, dass die TLS-Lösung als Least-Squares-Lösung im Gauß-Markov-Modell mit hergeleiteten Beobachtungen angesehen werden kann. Solche Beobachtungen werden in der geodätischen Praxis sehr häufig genutzt, ohne diese Fälle speziell zu bezeichnen. Dies unterstreicht die Grundaussage von Neitzel und Petrovic (2008), dass es nicht gerechtfertigt ist, die TLS-Lösung als eine eigenständige, womöglich noch »bessere« Methode der Ausgleichung anzusehen.

Im Vergleich zu dem von Reinking (2001) angegebenen Algorithmus reduziert sich auch der Aufwand zur Inversion der Normalgleichungsmatrix dadurch, dass hier statt einer  $(m+u) \times (m+u)$ -Matrix nur eine  $u \times u$ -Matrix invertiert werden muss. Allerdings muss zur Bestimmung des korrekten stochastischen Modells gegebenenfalls eine vollbesetzte  $m \times m$ -Matrix invertiert werden. Für bestimmte Fälle lässt sich der dabei auftretende Aufwand aber gering halten.

### Literatur

- Acar, M., Özlüdemir, M.T., Akyilmaz, O., Çelik, R.N. and Ayan, T.: Deformation analysis with Total Least Squares. *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.*, Nr. 6, pp. 663–669, 2006.
- Bopp, H. und H. Kraus: Die strenge Bestimmung einer ausgleichenden Geraden bei korrelierten Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate. *ZfV* 102, S. 261–270, 1977.
- Golub, G.H. and Ch. Van Loan: An analysis of the Total Least-Squares problem. *SIAM J. Numer. Anal.* 17, pp. 883–893, 1980.
- Kupferer, S.: Anwendung der Total-Least-Squares-Technik bei geodätischen Problemstellungen, Universitätsverlag Karlsruhe. Band 2005, 1, Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Karlsruhe, 2005.
- Lenzmann, L. und E. Lenzmann: Strenge Auswertung des nichtlinearen Gauß-Helmert-Modells. *AVN* 111, S. 68–73, 2004.
- Lenzmann, L. und E. Lenzmann: Zur Lösung des nichtlinearen Gauß-Markov-Modells. *zfv* 132, S. 108–110, 2007.
- Neitzel, F. und S. Petrovic: Total Least Squares (TLS) im Kontext der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate am Beispiel der ausgleichenden Gerade. *zfv* 133, S. 141–148, 2008.
- Niemeier, W.: Ausgleichsrechnung: Eine Einführung für Studierende und Praktiker des Vermessungs- und Geoinformationswesens. Berlin, New York: de Gruyter, 2002.
- Reinking, J.: Anmerkungen zu »Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter«. *zfv* 126, S. 295–296, 2001.
- Reinking, J., and A. Härting: Geodetic Contributions to Ship Dynamics. PositionIT online Nov/Dec 2007, pp. 18–23, EE Publishers, Muldersdrift, South Africa, 2007.
- Schaffrin, B.: Das Geodätische Datum mit stochastischer Vorinformation. *DGK Reihe C*, Nr. 313, 1985.
- Schaffrin, B.: Connecting the Dots: The Straight-Line Case Revisited. *zfv* 132, S. 385–394, 2007.
- Schaffrin, B. and A. Wiesner: On weighted total least-squares adjustment for linear regression. *Journal of Geodesy*, Volume 82, Number 7, S. 415–421, 2008.
- Wikipedia: [www.wikipedia.org, Total Least Squares](http://www.wikipedia.org/wiki/Total_least_squares). [http://en.wikipedia.org/wiki/Total\\_least\\_squares](http://en.wikipedia.org/wiki/Total_least_squares), Stand Juni 2008.

### Anschrift des Autors

Prof. Dr.-Ing. Jörg Reinking  
 FH Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven  
 Institut für Mess- und Auswertetechnik  
 Ofener Straße 16–19, 26121 Oldenburg  
 Tel.: 0441 7708-3250, Fax: 0441 7708-3336  
 reinking@fh-oldenburg.de