

Erkennung von physikalisch vorhandenen Periodizitäten in Zeitreihen

Rainer Mautz und Svetozar Petrovic

Zusammenfassung

In geodätischen Zeitreihen vermutet man häufig überlagerte periodische Signale. Die sich stellende Aufgabe besteht darin, ein entsprechendes Modell – bestehend aus beliebigen Frequenzen – mittels der Methode der kleinsten Quadrate »optimal« an eine empirische Datenreihe anzupassen. Bislang wurde die Nichtlinearität des Problems durch die Beschränkung auf vorgegebene Fourierfrequenzen umgangen. In diesem Beitrag wird das nichtlineare Problem der Frequenzsuche als globale Optimierungsaufgabe verstanden, die mit Hilfe des Intervall-Newton-Verfahrens für die im Datenmaterial vorhandene stärkste Frequenz exakt gelöst werden kann und somit physikalisch interpretierbar ist. Die Robustheit gegenüber einer ungleichmäßigen Abtastung oder dem Vorhandensein größerer Datenlücken lässt dem Verfahren einen besonderen Stellenwert zukommen. Vermutet man mehrere überlagerte Schwingungen im Datensatz, lässt sich ein sequenzielles Verfahren anwenden, das zwar nicht mehr die optimale Lösung garantieren kann, aber dennoch bei den aufgezeigten Anwendungen gute Ergebnisse liefert.

Summary

Geodetic data series are often assumed to contain superimposed periodicities. The task is to fit the corresponding functional model consisting of arbitrary valued frequencies to an empirical data series using the least-squares approach. So far the nonlinearity of the problem has been avoided by means of the restriction to prescribed Fourier-frequencies. In this paper the nonlinear frequency-search is handled as a global optimization problem and tackled with the Interval-Newton-method in order to solve exactly for the strongest real physical frequency contained in the data. The method's value is due to its robustness in case of unevenly distributed data points or larger data gaps. For the search of multiple frequencies in a time series, a sequential algorithm is proposed. The guaranteed optimum solution may be lost; however, good results are obtained in our applications.

1 Einleitung

Nicht nur in der Geodäsie, sondern auch in vielen anderen Fachdisziplinen sind Zeitreihen auf periodische Erscheinungen zu untersuchen. Verwendet man das Modell überlagert harmonischer Schwingungen $\sum a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, ist die Menge der reellen Zahlen als Definitionsmenge für die unbekannt Frequenzen ω eine einsichtige Wahl, da die in der Natur vorkommen-

den Frequenzen grundsätzlich jeden reellen Wert annehmen können. Die Aufgabe besteht nun darin, die unbekannt Frequenzen, Amplituden und Phasenlagen aufgrund von nicht fehlerfreien Beobachtungen mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Das resultierende nichtlineare Ausgleichungsproblem kann wegen Mangel an guten Näherungswerten nicht in ein lineares überführt und durch die Ausgleichungsrechnung in linearen Modellen gelöst werden. Wären die Frequenzen bekannt, läge ein lineares Problem zur Bestimmung der Amplituden und Phasenlagen vor. Deshalb behilft man sich meistens mit der a priori Festlegung von gleichabständigen Frequenzen. Ein Beispiel für diese Vorgehensweise ist die Fourieranalyse. Zwangsläufig verteilt sich die Energie der tatsächlich vorhandenen Schwingungen auf die Frequenzen des Modellansatzes. Dieser Energieverlust wird als Leakage-Effekt bezeichnet. Dass die Beschränkung auf einen bestimmten Satz von Fourierfrequenzen nachteilig sein kann, wurde in Jochmann (1993), Schuh et al. (2001), Mautz (2001, 2002) und Kaschenz (2002, 2003) gezeigt. Die unerwünschte Energieaufspaltung soll in diesem Aufsatz vermieden werden.

Mit der heutigen Rechnerleistung ist es möglich geworden, die tatsächlichen Frequenzen sowohl exakt als auch direkt zu bestimmen. Eine Möglichkeit bietet die stochastisch-systematische Durchsuchung des Frequenzraumes wie beispielsweise in Mautz (2001, 2002). Jedoch sind diese heuristischen Verfahren nicht zuverlässig und benötigen zeitaufwändige manuelle Optimierungen von internen Parametern. Aus diesem Grund wird nachstehend die Intervall-Newton-Methode vorgestellt, mit der eine Intervalleinschließung der exakten Lösung nach kleinsten Quadraten für die dominierende Frequenz garantiert werden kann.

Die Aktualität und die Schwierigkeiten des Problems werden in einigen Publikationen der letzten Jahre deutlich. Beispielsweise entwickelten die Astrophysiker Lomb (1976), Scargle (1982) sowie Press und Rybicki (1989) ein Periodogramm für nicht gleichabständige Datenreihen. In der Biomedizin entwickelten Van Dongen et al. (1999) einen Algorithmus, mit dem mehrere harmonische Schwingungen gefunden werden können – jedoch beschränken die Autoren den Suchraum auf Fourierfrequenzen. Andere Verfahren zur Detektion von Periodizitäten in Zeitreihen stützen sich auf Filtertechniken oder darauf, das originäre Datenmaterial zu verändern. Keines dieser Verfahren vermag jedoch die harmonischen Schwingungen in den Daten exakt zu rekonstruieren.

2 Eindimensionale Lösung mit Hilfe der Intervallalgebra

2.1 Das Periodogramm als Zielfunktion

Es sei y eine physikalische Größe, die zu beliebigen Zeitpunkten t aus einem betrachteten Zeitintervall beobachtet werden kann. Ferner sei angenommen, dass ein nichtlineares funktionales Modell $f(t)$ vollständig sei und der Gleichung

$$f(t) = y(t) - e(t), \quad e \sim (0, \sigma_0^2) \quad (1)$$

genüge, wobei das Modell $f(t)$ als deterministische Größe und der zufällige Fehler $e(t)$ als stochastische Größe aufgefasst werden. Wegen der angenommenen Vollständigkeit des Modells im Sinne einer Modellierung aller systematischen Einflüsse besitzt die Zufallsgröße e eine Normalverteilung mit einem Erwartungswert $\mu = 0$ und einer konstanten Varianz σ_0^2 . Sollen die idealisierten fehlerfreien Messungen $y(t) - e(t)$ durch eine harmonische Schwingung ausgedrückt werden, lautet der Modellansatz

$$f(t) = a \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

mit der Amplitude a , der Kreisfrequenz ω und einer Phasenlage φ . Nach Anwendung des Additionstheorems für den Sinus, $\sin(\omega t + \varphi) = \sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)$, lässt sich die harmonische Schwingung durch die Amplituden A und B ausdrücken:

$$f(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t). \quad (3)$$

Werden zu den ausgewählten Zeitpunkten t_1, t_2, \dots, t_n Beobachtungen der Größe y durchgeführt, ergeben sich die Messwerte $y_1 = y(t_1), \dots, y_n = y(t_n)$ mit den dazugehörigen zufälligen Fehlern $e_1 = e(t_1), \dots, e_n = e(t_n)$. Mit den Bezeichnungen $\mathbf{t} = [t_1, t_2, \dots, t_n]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, $\mathbf{e} = [e_1, e_2, \dots, e_n]^T$, $\mathbf{f} = [f_1(t_1), f_2(t_2), \dots, f_n(t_n)]^T$ folgen aus (1) die Beobachtungsgleichungen für die Zeitreihe $\{t_i \mid y_i, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$: $\mathbf{f} = \mathbf{y} - \mathbf{e}$. Die Schätzung der drei Parameter A, B, ω kann durch Minimierung der euklidischen L_2 -Norm

$$\|\mathbf{e}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n e_i^2} \rightarrow \min \quad (4)$$

erfolgen, wenn für die Anzahl der Beobachtungen $n \geq 3$ gilt. Dabei wird die Summe der Residuenquadrate minimiert, die sich aus dem funktionalen Modell (3) und den Beobachtungen \mathbf{y} ergeben. Die resultierende Zielfunktion lautet:

$$F(\omega, A, B) = \sum_{i=1}^n (A \sin(\omega t_i) + B \cos(\omega t_i) - y_i)^2 = \min. \quad (5)$$

Bei einem vorgegebenen, konstanten $\omega \neq 0$ besitzt (5) eine eindeutige Lösung für A und B . Führt man die Abkürzungen

$$S = \sum_{i=1}^n \sin^2(\omega t_i), \quad C = \sum_{i=1}^n \cos^2(\omega t_i), \quad G = \sum_{i=1}^n \sin(\omega t_i) \cos(\omega t_i), \\ a = \sum_{i=1}^n \sin(\omega t_i) y_i, \quad b = \sum_{i=1}^n \cos(\omega t_i) y_i \quad (6)$$

ein, ergibt sich für A und B das lineare Normalgleichungssystem $AS + BG - a = 0$, $AG + BC - b = 0$ oder in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} S & G \\ G & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Dessen Lösung

$$A = \frac{Ca - Gb}{SC - G^2}, \quad B = \frac{Sb - Ga}{SC - G^2} \quad (8)$$

kann in (5) eingesetzt werden, sodass die Zielfunktion wie folgt geschrieben werden kann:

$$F(\omega) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{(Ca - Gb) \sin(\omega t_i) + (Sb - Ga) \cos(\omega t_i)}{SC - G^2} - y_i \right)^2 = \min. \quad (9)$$

Zu beachten sei an dieser Stelle, dass (9) nur noch von der Frequenzvariablen ω abhängt. Durch das Auflösen der Doppelsummen in (9) erhält man den Ausdruck

$$F(\omega) = \frac{SG^2b^2 - SC^2a^2 - S^2Cb^2 + CG^2a^2 - 2G^3ab + 2SCGAb + S^2C^2Y + G^4Y - 2SCG^2Y}{(SC - G^2)^2}, \quad (10)$$

der mit Hilfe von Formelumstellungen zur vereinfachten Darstellung der Zielfunktion

$$F(\omega) = Y - \frac{Ca^2 + Sb^2 - 2Gab}{SC - G^2} \quad (11)$$

führt. Abgesehen von dem Faktor -2 und der Konstanten

$$Y = \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (12)$$

ist (11) identisch mit dem nicht-normalisierten Lomb-Scargle-Periodogramm, das von Lomb (1976) und Scargle (1982) für die Analyse unregelmäßiger Datenreihen aufgestellt wurde. Es ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Zielfunktion (11) und dem Lomb-Scargle-Periodogramm (LS) zu

$$LS(\omega) = 2(Y - F(\omega)). \tag{13}$$

Die Minimierung von (11) ist gleichbedeutend mit der Maximierung von (13). Beides sind Probleme aus der Klasse globaler Optimierungsprobleme, da $F(\omega)$ bzw. $LS(\omega)$ multimodal sind (= besitzen viele lokale Minima), ohne dass von der Kenntnis eines ausreichenden Näherungswertes für die Unbekannte ω ausgegangen werden kann. Allein mit Hilfe eines lokalen Optimierungsverfahrens wie z. B. dem Gauß-Newton-Verfahren, können Probleme dieser Klasse nicht gelöst werden. Das in der Literatur gebräuchliche »klassische« Periodogramm

$$P(\omega) = \frac{1}{n}(a^2 + b^2), \tag{14}$$

ist eine Approximation von (11), wobei $G = 0$, $S = n/2$ und $C = n/2$ abgeschätzt werden. Auswertungen der Periodogrammfunktion (14) benötigen einen dreifach geringeren Rechenaufwand, jedoch ist (14) nicht identisch mit der exakten Lösung im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate, insbesondere bei unregelmäßigen Zeitabständen der Daten. Die Maximierung von P ist ebenfalls ein globales Problem.

2.2 Ableitung der Zielfunktion

Für die Anwendung der Intervall-Newton-Methode auf die Zielfunktion (11) wird deren Ableitung nach ω benötigt. Schreibt man (11) in der Form

$$F(\omega) = Y - \frac{V}{W}, \tag{15}$$

lautet die erste Ableitung

$$F'(\omega) = \frac{VW' - V'W}{W^2},$$

mit

$$V = C(a^2 - b^2) + nb^2 - 2Gab,$$

$$W = nC - C^2 - G^2,$$

$$V' = C'(a^2 - b^2) + 2b(b'(n - C) - G'a - Ga') + 2a(Ca' - Gb'),$$

$$W' = C'(n - 2C) - 2GG'$$

(16)

und

$$C' = -\sum_{i=1}^n t_i \sin(2\omega t_i), \quad G' = \sum_{i=1}^n t_i \cos(2\omega t_i),$$

$$a' = \sum_{i=1}^n t_i y_i \cos(\omega t_i), \quad b' = -\sum_{i=1}^n t_i y_i \sin(\omega t_i)$$

unter Berücksichtigung der Formeln (6), die hier nicht wiederholt wurden.

2.3 Intervallarithmetik

Das im Abschnitt 2.1 beschriebene Minimierungsproblem wird mit Hilfe der Intervallalgebra exakt gelöst. Schon Moore (1966) entwickelte die Intervallrechnung zur Fehlerabschätzung. Die Verwendung der Intervallarithmetik zur Lösung globaler Optimierungsprobleme wurde von Hansen (1979) eingeführt. Im Textbuch von Hansen (1992) wird eine ausführliche Diskussion über Intervallmethoden geführt. Xu (2002) beschreibt eine hybride, auf Intervallen basierende Optimierungsmethode zum Auffinden der minimalen Lösung einer Zielfunktion. Diese Methode findet im Folgenden Anwendung bei der Minimierung der Zielfunktion(11).

Die Intervallalgebra für reelle Zahlen basiert auf Operationen für abgeschlossene Intervalle. Für zwei Intervalle $X = [x^L; x^R]$ und $Y = [y^L; y^R]$ mit den unteren Grenzen »x^L« bzw. »y^L« und den oberen Grenzen »x^R« bzw. »y^R« gilt für die vier Grundoperatoren $X \text{ op } Y = \{x \text{ op } y \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$ für $\text{op} \in \{+, -, \times, \div\}$. Durch diese explizite Definition wird der exakte Wertebereich der Operationen beschrieben und somit werden sie erst anwendbar. Die Umsetzung der vier Grundrechenarten lautet dann

$$X + Y = [x^L + y^L, x^R + y^R],$$

$$X - Y = [x^L - y^R, x^R - y^L],$$

$$X \times Y = [\min\{x^L y^L, x^L y^R, x^R y^L, x^R y^R\}, \max\{x^L y^L, x^L y^R, x^R y^L, x^R y^R\}]$$

$$1/X = [1/x^R, 1/x^L] \text{ für } 0 \notin X,$$

$$X \div Y = [X \times 1/Y]. \tag{17}$$

Ferner lassen sich für alle transzendenten Funktionen Intervallerweiterungen angeben. Beispielsweise kann die intervallwertige Sinusfunktion $F = \text{SIN}(X)$ mit $X = [x^L; x^R]$ und $F = [f^L; f^R]$ unter den Voraussetzungen $x^L \in [-0.5\pi; 1.5\pi]$, $x^R \in [-0.5\pi; 3.5\pi]$ und $x^L < x^R$ nach den folgenden Regeln (siehe nächste Seite) implementiert werden.

Prinzipiell lässt sich die Intervallauswertung für alle reellwertigen Funktionen implementieren, beispielsweise für die Zielfunktion (11).

An dieser Stelle soll auf die Überschätzung bei der Intervallrechnung hingewiesen werden. Dabei ist das Ergebnisintervall häufig eine echte Obermenge des tatsächlichen Wertebereichs. Ferner ist zu beachten, dass je nach Wahl des Funktionsausdrucks der Wertebereich mehr oder weniger überschätzt wird, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei $X = [-2; 3]$, dann ist $X \times X = [-6; 9]$, aber $X^2 = [0; 9]$. Bei der Wahl einer formalen Schreibweise der Zielfunktion ist daher die Überschätzung des Intervalls so klein wie möglich zu halten. Auch sei noch darauf hingewiesen, dass bei der Verwendung einer begrenzten Rechenarithmetik die Rundungen nach außen gerichtet durchgeführt werden müssen. Eine tiefere Auseinandersetzung mit dieser Problematik ist in Heeks (2002) sowie auf dem Fachgebiet der Geodäsie in den

Regeln:Wenn $(x^L \geq 0.5 \pi)$

| | |
|---|---|
| { wenn $(x^R < 1.5 \pi)$ | dann $\{f^L = \text{SIN}(x^R), f^R = \text{SIN}(x^L)\}$ |
| wenn $(x^R \geq 1.5 \pi) \wedge (x^R < 3.0 \pi - x^L)$ | dann $\{f^L = -1.0, f^R = \text{SIN}(x^L)\}$ |
| wenn $(x^R \geq 3.0 \pi - x^L) \wedge (x^R \leq 2.5 \pi)$ | dann $\{f^L = -1.0, f^R = \text{SIN}(x^R)\}$ |
| wenn $(x^R > 2.5 \pi)$ | dann $\{f^L = -1.0, f^R = 1.0\}$ |
| } sonst | |
| { wenn $(x^R < 0.5 \pi)$ | dann $\{f^L = \text{SIN}(x^L), f^R = \text{SIN}(x^R)\}$ |
| wenn $(x^R \geq 0.5 \pi) \wedge (x^R < \pi - x^L)$ | dann $\{f^L = \text{SIN}(x^L), f^R = 1.0\}$ |
| wenn $(x^R \geq \pi - x^L) \wedge (x^R \leq 1.5 \pi)$ | dann $\{f^L = \text{SIN}(x^R), f^R = 1.0\}$ |
| wenn $(x^R > 1.5 \pi)$ | dann $\{f^L = -1.0, f^R = 1.0\}$ |
| } | |

Dissertationen von Kutterer (1994, 2002) und Schön (2003) zu finden.

2.4 Die Intervall-Newton-Methode

Die Newton-Methode dient der Bestimmung von Nullstellen einer Funktion, d. h. der Bestimmung von Lösungen für Gleichungen der Form $f(x) = 0$. Sei x_i ein Näherungswert für eine Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion f , lautet die Iterationsvorschrift der Newton-Methode

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad (18)$$

wobei f' die erste Ableitung von f und x_{i+1} der verbesserte Approximationswert für die Nullstelle von f ist. Die Intervall-Newton-Methode hingegen dient der Bestimmung aller Nullstellen einer Funktion f innerhalb eines Intervalls $X_i = [x_i^L; x_i^R]$. Sei $x_i \in X_i$ ein beliebiger Punkt des Intervalls (z. B. der Mittelpunkt $(x_i^L + x_i^R)/2$), dann lautet ein Iterationsschritt des Intervall-Newton-Algorithmus

$$Y_i = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(X_i)}, \quad X_{i+1} = X_i \cap Y_i, \quad (19)$$

$f'(X_i)$ kann geometrisch als ein Intervall gedeutet werden, das alle möglichen Steigungen von f im Intervall X umfasst. Sei $f'(X_i) = [a; b]$, erfolgt die Berechnung des Reziprokwertes $1/f'(X_i)$ in (19) nach der Regel

$$\frac{1}{f'(X_i)} = \begin{cases} [\frac{1}{b}; \frac{1}{a}] & \text{if } 0 \notin f'(X_i) \\ [-\infty; \frac{1}{a}] \cup [\frac{1}{b}; +\infty] & \text{if } 0 \in f'(X_i) \end{cases}. \quad (20)$$

Für den Fall, dass $0 \in f'(X_i)$, besteht $1/f'(X_i)$ aus der Vereinigung von zwei Intervallen mit offenen Intervallsgrenzen. Daher kann Y_i in (19) ebenso unbeschränkt

sein. Jedoch nach dem Schnitt mit der Definitionsmenge X_i , muss X_{i+1} in (19) wiederum beschränkt sein. X_{i+1} kann aus der leeren Menge, aus einem oder zwei Intervallen bestehen. Im letzteren Fall muss ein Intervall in eine Liste zu bearbeitender Intervalle aufgenommen werden, während das andere Intervall als Eingangsgröße für den nächsten Iterationsschritt dient. Das Verfahren kann abgebrochen werden, wenn für die Breite $d = x^R - x^L$ des Intervalls X_i für ein kleines $\varepsilon > 0$ die Forderung $d < \varepsilon$ gilt. Mit diesem Verfahren können alle Nullstellen in X_i bis zu einem beliebig kleinen Grenzwert ε bestimmt werden.

2.5 Algorithmus zur Bestimmung des eindimensionalen Optimums

In diesem Abschnitt wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem es anhand einer Datenreihe möglich ist, den optimalen Frequenzwert innerhalb eines vorgegebenen Intervalls zu finden.

a) Eingangsgrößen

Gegeben sei eine Zielfunktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ sowie ein Startintervall X_i mit $i = 0$ in den Grenzen x_i^L, x_i^R . Bei Anwendungen auf reales Datenmaterial lässt sich stets für die Unbekannte ein abgeschlossenes Intervall abschätzen, das die globale Lösung enthalten muss. Bei der Frequenzsuche beispielsweise ist die Wahl des Suchraums zwischen 0 und der Nyquist-Frequenz zweckmäßig, falls es sich um durchgehend gleichabständige Daten handelt. Bei unregelmäßigen Zeitabständen bestimmen ausschließlich die physikalischen Hintergründe die Wahl des Startintervalls, das durchaus ein Vielfaches der theoretischen Nyquist-Frequenz betragen kann. Bei einer unregelmäßigen Abtastung ist die Nyquist-Frequenz ohnehin von geringer Bedeutung.

b) Bestimmung eines neuen lokalen Minimums

Der Mittelpunkt $x_i = (x_i^L + x_i^R)/2$ des Intervalls X_i und dessen Funktionswert $f(x_i)$ werden bestimmt. Im ersten

Schleifendurchlauf wird ohne vorherige Abfrage ein lokales Optimierungsverfahren mit dem Mittelpunkt als Startwert begonnen. Ansonsten wird zunächst mit $f(x_i) < f(x_{Lmin})$ überprüft, ob der Funktionswert des Mittelpunkts kleiner ist als das bisherige Minimum $f(x_{Lmin})$, denn erst dann lohnt sich der Aufwand für ein lokales Verfahren. Die Folge des lokalen Verfahrens konvergiert dann zu einem neuen lokalen Minimum x_{Lneu} , dessen Funktionswert kleiner ist als das bisherige Minimum. Mit $x_{Lmin} := x_{Lneu}$ wird das alte Minimum x_{Lmin} durch das kleinere x_{Lmin} ersetzt. Falls $x_{Lmin} \notin X_i$, müssen die Randwerte des Intervalls untersucht werden. Mehr über den Einsatz von lokalen Verfahren siehe Abschnitt 2.6.

c) Intervall-Newton-Schritt

Die Intervall-Newton-Methode (19) wird nicht direkt auf die Zielfunktion $f(x)$, sondern auf die Hilfsfunktion

$$g(x) = f(x) - f(x_{Lmin}) \tag{21}$$

angewendet. Folglich lautet ein Intervall-Newton-Schritt

$$x_i = (x_i^L + x_i^R) / 2, \quad X = X_i \cap \left(x_i - \frac{g(x_i)}{g'(X_i)} \right) \tag{22}$$

Da aus Gleichung (21) $g'(x) = f'(x)$ folgt, gilt ebenso $g'(X_i) = f'(X_i)$. Der Algorithmus (22) führt zur Bestimmung der Punkte, für die gilt $X = \{x: f(x) < f(x_{Lmin})\}$. Nach einer Evaluation von (22) muss zwischen den folgenden drei möglichen Fällen unterschieden werden: Falls X aus zwei nicht miteinander verbundenen Intervallen X_a und X_b besteht, muss das Verfahren für beide Intervalle fortgesetzt werden. Mit $X_i := X_a$ und $X_{i+1} := X_b$ werden sie in eine Liste der zu bearbeitenden Intervalle aufgenommen. Mit $i := i + 1$ wird der oberste Listeneintrag zum aktuellen Intervall X_i . Besteht X aus einem Intervall, erfolgt mit der Neuzuweisung $X_i := X$ eine Verkleinerung der Intervallbreite von X_i . Im dritten Fall, falls sich aus (22) die leere Menge für X ergibt, kann X_i von der Liste gestrichen werden.

d) Löschen irrelevanter Intervalle

In diesem Schritt wird getestet, ob das aktuelle Intervall X_i überhaupt als Kandidat für ein globales Minimum in Frage kommen kann. Zu diesem Zweck wird mit

$$G([g^L, g^R]) = g(X_i) = f(X_i) - f(x_{Lmin}) \tag{23}$$

das Intervall G mit den Grenzen g^L und g^R bestimmt. Hierbei wird die Hilfsfunktion g mit dem Argument X_i als Intervallfunktion ausgewertet. Ergibt sich für das resultierende Intervall G eine untere Grenze $g^L > 0$, kann g innerhalb des Intervalls X_i keine Nullstelle enthalten. Folglich kann wegen $f(X_i) > f(x_{Lmin})$ kein Element des Intervalls X_i zum globalen Minimum von f gehören. X_i wird aus der Liste gestrichen und mit der Verminderung

von i um eins wird das nächste Intervall der Liste entnommen. Ebenfalls von der Liste genommen werden kleine Intervalle, für die gilt: $|x^R - x^L| < \varepsilon$. Hierbei ist ε eine positive, aber beliebig kleine Konstante.

e) Rücksprung oder Abbruch

Im letzten Abschnitt eines Schleifendurchlaufs wird mit dem obersten Intervall X_i in der Liste zurück zu b) gesprungen und die Anweisungen für b) – e) wiederholt. Ist die Liste der zu untersuchenden Intervalle leer, kann der Algorithmus beendet werden. Es ist nun bewiesen, dass das aktuelle lokale Minimum x_{Lmin} ein Element der globalen Lösung von f innerhalb des Startintervalls X_0 ist. Die globale Lösung ist gefunden, da für alle übrigen Elemente des Intervalls ausgeschlossen werden kann, dass deren Funktionswerte kleiner als $f(x_{Lmin})$ sein können. Anderenfalls hätte der Algorithmus ein x_i gefunden, das die Bedingung $f(x_i) < f(x_{Lmin})$ erfüllt.

Die Grundidee des Verfahrens ist in Abb. 1 schematisch dargestellt.

Speziell für die Frequenzsuche erfolgt die Implementierung mittels Einbindung der Zielfunktion (11) $F(\omega) := f(x)$ und deren Ableitung (16) $F'(\omega) := f'(x)$ in das allgemeine Schema.

Ein Konvergenzbeweis des Verfahrens kann im Rahmen dieses Beitrags nicht geliefert werden, jedoch sei bezüglich der Konvergenz Folgendes angemerkt:

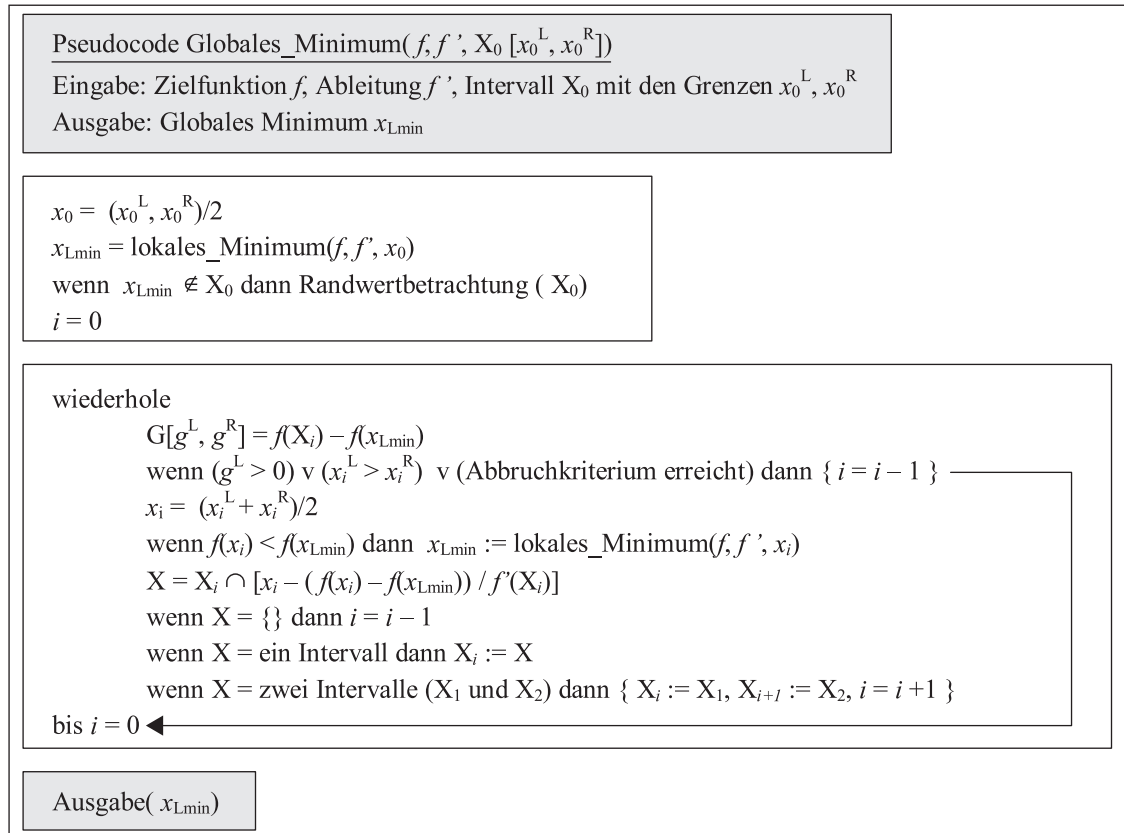
1. Das Startintervall für die Frequenzunbekannte ist abgeschlossen.
2. Die Zielfunktion (11) und die Ableitung (16) werden durch die Verknüpfung der Intervalloperationen $\{+, -, \times, \div\}$ sowie durch die transzendenten Funktionen SIN und COS gebildet.
3. Es ist sofort einsichtig, dass (abgesehen von dem Operanden $\{+\}$) alle Ergebnisintervalle der unter 2. genannten Operationen und Funktionen abgeschlossen sind, sofern alle Argumente abgeschlossene Intervalle sind. Letzteres ist jedoch auf Grund von 1. gegeben.
4. Bei der Verwendung der Iterationsformel des Intervall-Newton-Verfahrens

$$X_{i+1} := X_i \cap \left(x_i - \frac{g(x_i)}{g'(X_i)} \right) \tag{24}$$

findet der Operand $\{+\}$ genau ein Mal Verwendung.

5. Die »erweiterte Intervallarithmetik« (siehe Heeks 2002, S. 7) erlaubt die Division, auch wenn im Nennerintervall die Null enthalten ist.
6. Für $0 \notin g'(X_i)$ verringert sich gemäß (20) die Intervallbreite innerhalb eines Schrittes von (24) um mindestens die Hälfte, da stets eine Seite jenseits des Mittelpunktes x_i vom Intervall X_i entfällt. Dies ist geometrisch einsichtig, da die minimale und maximale Steigung das gleiche Vorzeichen besitzen.
7. Für $0 \in g'(X_i)$ gilt ebenfalls $X_{i+1} \subset X_i$. Anhand von (20) ist einsichtig, dass die Umgebung von x_i nicht

Abb. 1: Schematische Darstellung des Verfahrens zur Bestimmung des eindimensionalen Optimums



Element der beiden resultierenden Teilintervalle X_{i+1} sein kann.

Ratz (1992, S. 23) schreibt: »Das Verfahren kann wegen der verwendeten Schnittbildung nicht divergieren ...«. Seine These wird ausführlich geometrisch begründet, wobei insbesondere die beiden Fälle $0 \notin g'(X_i)$ und $0 \in g'(X_i)$ unterschieden werden. Das Maß der Überschätzung wirkt zwar auf die Konvergenzgeschwindigkeit, jedoch nicht auf die Konvergenz selbst.

2.6 Lokale Optimierung

Die lokalen Optimierungsverfahren dienen zur Suche der optimalen Lösung einer Zielfunktion in der Nachbarschaft eines Startpunktes. Konvexe Probleme können mit lokalen Methoden direkt gelöst werden; für globale Probleme dient ihr Einsatz der Beschleunigung. Teunissen (1990, S. 138) stellte für die lokalen Optimierungsverfahren das folgende Schema auf:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + t_i \mathbf{D}_i, \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Hierbei ist der Skalar t_i eine positive Schrittlänge und \mathbf{D}_i eine positiv definite Matrix, die als Suchrichtung für den i -ten Iterationsschritt interpretiert werden kann. Die Verfahren unterscheiden sich vor allem durch verschiedene Schrittweiten und Suchrichtungen.

Das in der Geodäsie als Standard geltende Gauß-Newton-Verfahren kann erfolgreich eingesetzt werden,

um für einen Satz gegebener Näherungswerte die benachbarte lokale Lösung zu finden. Jedoch gehen bei diesem Verfahren die linearisierten Beobachtungsgleichungen ein. Die Ersetzung der tatsächlichen Beobachtungsgleichungen mit dem linearisierten Pendant kann zur Divergenz des Verfahrens führen. Zum Aufbau eines Algorithmus, der die optimale Lösung garantiert, ist jedoch der Einsatz eines zuverlässigen Verfahrens notwendig. Ein sehr zuverlässiges Verfahren ist die Methode des steilsten Abstiegs in Verbindung mit einem Liniensuchalgorithmus. Der Gradient $\nabla f(\mathbf{x}_i)$ dient hierbei als Suchrichtung \mathbf{D}_i . Folglich lautet die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - t_i \nabla f(\mathbf{x}_i). \quad (26)$$

Um zu verhindern, dass das Minimum verfehlt wird, optimiert man die Schrittweite t_i mit Hilfe eines Liniensuchalgorithmus:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \min : f(\mathbf{x}_i - t_i \nabla f(\mathbf{x}_i)). \quad (27)$$

Eine ausführliche Diskussion über Gradientenmethoden kann Schwetlick (1979) entnommen werden. Zwar zeigt die Methode des steilsten Abstiegs lediglich eine lineare Konvergenz und der Liniensuchalgorithmus benötigt zusätzlich hohen Rechenaufwand, doch als Teil des globalen Optimierungsalgorithmus ist der Aufwand vernachlässigbar. Bei den Anwendungen wird die lokale Suche selten mehr als fünf Mal angefordert.

Eine superlinear konvergierende Methode ist die BFGS quasi-Newton-Methode. Sie wurde angeblich unabhängig von Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno im Jahre 1970 entwickelt. Weitere Details können von Xu (2002), der den Einsatz der BFGS-Methode vorschlägt, entnommen werden.

2.7 Algorithmus zur Berechnung überlagerter Periodizitäten

Falls eine Zeitreihe mehrere überlagerte harmonische Schwingungen enthält, kann der folgende Algorithmus erwogen werden. Der Input besteht wie beim eindimensionalen Fall aus einem Datenvektor $\mathbf{y}(t)$ und für die Frequenzen aus einem Hyperquader (mehrdimensionales Intervall) Ω mit den Grenzen ω^L, ω^R . Im ersten Schritt wird gemäß 2.5 die globale Lösung ω_1 für eine Frequenz bestimmt. Die zur Frequenz ω_1 gehörige harmonische Schwingung wird von den Daten $\mathbf{y}(t)$ abgezogen. Es resultiert ein Residuenvektor, auf den die eindimensionale Optimierung erneut angewendet wird. Nach diesem Schritt liegen die Frequenzen ω_1 und ω_2 vor. Jedoch entsprechen sie wegen der sequenziellen Rechenfolge nicht exakt der zweidimensionalen Lösung. Aus diesem Grunde wird an dieser Stelle eine Ausgleichung für ω_1 und ω_2 berechnet. Ein lokales Verfahren wie die Gauß-Newton-Iteration kann dafür verwendet werden. Die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene Unzuverlässigkeit spielt hier keine Rolle, da das eindimensionale Verfahren ausreichende Näherungswerte für ω liefert. Im nächsten Schritt werden beide Schwingungen von den Daten abgezogen. Zu diesem Zweck wird die mehrdimensionale Modellfunktion \mathbf{f}

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}(t)) = \sum_{k=1}^m A_k \sin(\omega_k t) + B_k \cos(\omega_k t), \tag{28}$$

mit $m = \text{Dimension}(\boldsymbol{\omega})$, $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m]$,

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & G_{11} & S_{12} & G_{12} & \dots \\ & C_{11} & G_{21} & C_{12} & \dots \\ & & S_{22} & G_{22} & \dots \\ & sym. & & C_{22} & \dots \\ & & & & \dots \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ \dots \end{bmatrix} \tag{29}$$

und Gleichungen (6) für $m = 2$ aufgestellt. Nachdem $\mathbf{f}(\omega_1, \omega_2)$ von der Zeitreihe $\mathbf{y}(t)$ abgezogen wurde, wird in den Residuen eine dritte Frequenz gesucht. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis der größte verbleibende Wert des Periodogramms (13) kleiner als die Signifikanzgrenze z_0 ist. Gemäß Scargle (1982) gilt

$$z_0 \approx \ln(N / p_0), \tag{30}$$

wobei p_0 die Wahrscheinlichkeit der Annahme eines falschen Alarms (z. B. $p_0 = 0.05$) und N die Anzahl der un-

abhängigen Frequenzen im Modell ist. z_0 entspricht dem Niveau, dessen Wahrscheinlichkeit für einen falschen Alarm bei p_0 liegt. Anmerkung: Die geschätzten Parameter sind wegen a) der ungleichmäßigen Abtastung der Zeitreihe und b) der Erweiterung des Definitionsraumes auf Nicht-Fourierfrequenzen miteinander korreliert. Diese Tatsache ist bei den Statistiken und Fehlerbetrachtungen zu beachten.

3 Numerische Tests mit überlagerten Periodizitäten

In den folgenden zwei Beispielen wird der mehrdimensionale Algorithmus entsprechend Abschnitt 2.7 auf jeweils einen Datensatz angewendet und das Ergebnis kommentiert.

3.1 Beispiel 1: Simulation

Es wurde eine Zeitreihe mit 100 nicht gleichabständigen Beobachtungen innerhalb eines Intervalls $[-\pi; \pi]$ entlang der Zeitachse erzeugt. Die erzeugende Funktion besteht aus überlagerten harmonischen Funktionen der Form

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^m a_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \tag{31}$$

Tab. 1: Die Eingangsparameter für das Beispiel 1

| Frequenzen ω [Schwingungen/ Datensatz] | Amplituden a [cm] | Phasenlagen φ [Grad] |
|---|------------------------|---------------------------------|
| 0.3 | 1.0 | 0 |
| 5.5 | 3.0 | 10 |
| 10.0 | 7.0 | 20 |
| 10.3 | 7.0 | 30 |
| 200.0 | 1.0 | 40 |

Überlagert wurden fünf verschiedene Einzelschwingungen, deren Amplituden, Phasenlagen und Frequenzen der Tab. 1 entnommen werden können. Als besondere »Schwierigkeit« für die spätere Rekonstruktion dieser Parameter anhand der Datenreihe sei das Folgende angemerkt:

- a) Bei der langperiodischen Schwingung $\omega = 0.3$ liegt nicht einmal 1/3 einer Periode innerhalb des Aufnahmezeitraumes.
- b) Eine Frequenz liegt mit $\omega = 5.5$ genau zwischen den zwei Fourierfrequenzen 4.0 und 5.0.
- c) Aufgrund der geringen Datenlänge von nur 100 Beobachtungspaaren gelten die zwei Frequenzen $\omega = 10.0$ und $\omega = 10.3$ als dicht beieinander liegend.

Ihre Phase verschiebt sich innerhalb des Messzeitraumes nur gering. Eine Trennung der beiden Periodizitäten ist mit Hilfe des Periodogramms nicht erkennbar, siehe Abb. 3 und Abb. 4.

- d) Die Frequenz $\omega = 200.0$ liegt außerhalb des Bereiches der so genannten »natürlichen« Frequenzen bzw. über der Nyquist-Frequenz, die allgemein bei $\omega_N = n\pi/T_0$ liegt. Mit $n = 100$ Beobachtungen und einem Messzeitraum von $T_0 = 2\pi$ wäre die theoretische Nyquist-Frequenz $\omega_N = 50$. Jedoch können aufgrund der fehlenden Gleichabständigkeit der Zeitreihe über ω_N hinaus Informationen im Frequenzraum genutzt werden.
- e) Neben der unregelmäßigen Verteilung der Datenpunkte entlang der Zeitachse klafft zwischen $t = 1$ und $t = 2$ eine Datenlücke, erkennbar in Abb. 2. Eine direkte Anwendung von Fourieranalysen kann somit ausgeschlossen werden.

Allein mit Hilfe der eindimensionalen Periodogramm-analyse können die Einzelschwingungen nicht rekonstruiert werden. Im Frequenzplot der Zielfunktion in Abb. 3 und im LS-Periodogramm in Abb. 4 ist lediglich ein Peak bei $\omega \approx 10$ zu erkennen. Durch den so genannten Leakage-Effekt ist die Energie der »tatsächlichen« Frequenzen auf andere Bereiche im Spektrum verteilt. Dennoch gelingt mit dem unter 2.7 beschriebenen Algorithmus die exakte Rekonstruktion der Eingangsparameter gemäß Tab. 1.

Zunächst wurde das eindimensionale Verfahren (siehe Abschnitt 2.5) angewendet, um die Frequenz mit der größten Amplitude zu ermitteln. Als Startintervall wurde $X = [0; 300]$ Schwingungen pro Datensatz gewählt. Diese Wahl ist willkürlich; sie sollte aber aufgrund physikalischer Vorinformationen getroffen werden. Größere Startintervalle erhöhen die Anzahl notwendiger Rechenschritte, sie können aber auch zu mehrdeutigen Lösungen führen, wenn beispielsweise das Startintervall für eine gleichabständige Zeitreihe über die Nyquist-Frequenz hinausgeht. Ein in der Intervallmitte $x_0 = 150.00$ gestartetes lokales Optimierungsverfahren konvergiert gegen die lokale Lösung $x_L = 150.63$ mit $F(x_L) = 9044$. Im nächsten Schritt wird mit Hilfe des globalen Verfahrens die eindimensionale Lösung $F_{\min}(x_{\min} = 10.14) = 530$ bestimmt. Ein Gauß-Newton-Verfahren kann diese Lösung nicht verbessern, da es sich bereits um das eindimensionale globale Optimum handelt.

Anhand der Residuen wird die zweite Frequenz-unbekannte eingeführt. Deren globale Lösung lautet nach Anwendung des eindimensionalen Verfahrens $F_2(x_2 = 5.46) = 95$. Nun erweist sich die Anwendung des Gauß-Newton-Verfahrens für beide Frequenzen als zweckmäßig. Dadurch wird die Lösung auf $F_2 = 82$ verbessert, während sich die Werte für die Frequenzen nur gering verändern. Das im Abschnitt 2.7 beschriebene Verfahren wird bis zur fünften Frequenz fortgesetzt. Wegen des Fehlens zufälliger Fehler bzw. nicht model-

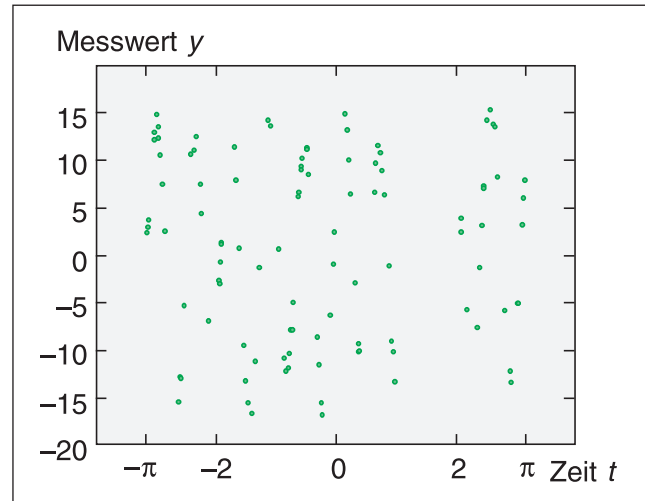


Abb. 2: Plot der nicht gleichabständigen Zeitreihe mit Datenlücke zwischen den Zeitpunkten 1.0 und 2.0

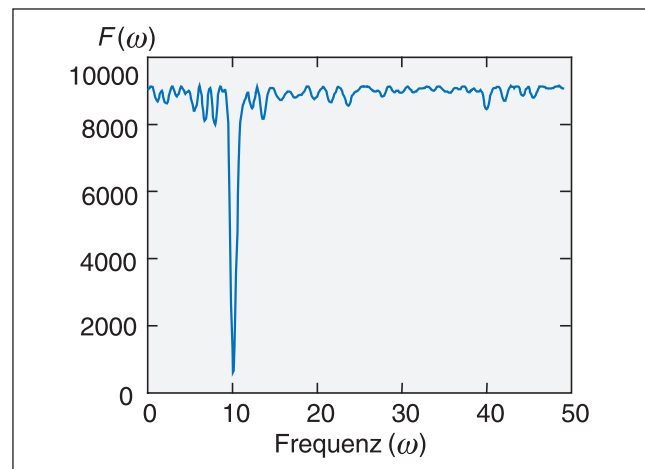


Abb. 3: Die Zielfunktion $F(\omega)$ (11) als Summe der Residuenquadrate entlang der Frequenzachse mit der Einheit Schwingungen pro (gesamten) Datensatz [SpD]. Bis auf die verschmolzenen Frequenzen 10.0 und 10.3 sind die Eingabefrequenzen nicht erkennbar.

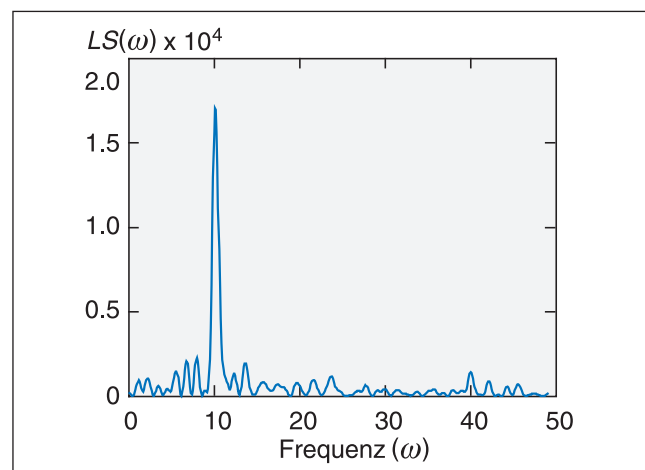


Abb. 4: Das nicht-normalisierte Lomb-Scargle-Periodogramm $LS(\omega)$ (13). Es unterscheidet sich von $F(\omega)$ lediglich durch einen negativen Faktor und eine Konstante. Die Einheit entlang der Frequenzachse ist [SpD].

liert Systematiken, wird im Beispiel 1 die globale Lösung von $F_5 = 0.0$ erreicht.

Tab. 2: Rechenprotokoll für das Beispiel 1

| | |
|---|----------|
| Anzahl der gesuchten Frequenzen: | 5 |
| Anzahl der Starts des globalen Verfahrens: | 5 |
| Startintervall [Schwingungen/Datensatz]: | [0; 300] |
| Maximale Anzahl der gespeicherten Intervalle: | 21 |
| Anzahl der Starts des lokalen Verfahrens: | 20 |
| Anzahl lokaler Verfahren pro Unbekannte: | 4 |
| Anzahl der Auswertungen der Zielfunktion: | 6855 |
| Zielfunktions-Auswertungen pro Unbekannte: | 1371 |
| Anzahl der Ausgleichungen (G.-N.-Verfahren): | 5 |
| Mittlere Anzahl der G.-N.-Schritte: | 4.8 |
| Funktionswert des globalen Optimums: | 0.00 |
| Globales Optimum erreicht: | Ja |

Tab. 2 zeigt, dass für die globale Suche einer Frequenz lediglich vier Starts des rechentechnisch aufwändigen lokalen Verfahrens erforderlich sind. Die Anzahl der untersuchten Intervalle ist mit 1371 je Frequenzunbekannte relativ hoch, da das Ausgangsintervall in kleine Teilintervalle aufgespalten wird, bevor diese als Kandidaten für die globale Lösung ausgeschlossen werden können.

3.2 Beispiel 2: Anwendung auf reale Daten

Diesem Beispiel liegen reale Beobachtungen der Altimetersatelliten ERS-2 und Topex/Posidon zugrunde, die in einem Kreuzungspunkt der Bahnen innerhalb eines Zeitraums von 3559 Tagen erfasst wurden. Insgesamt liegen für diesen Zeitraum $n = 360$ Beobachtungen der Meereshöhe vor. Wegen der unterschiedlichen Zykluslängen der Satellitenbahnen von 35.0 bzw. 9.91 Tagen liegen die Beobachtungszeitpunkte nicht in gleichen Abständen vor. Die Aufgabe besteht darin, die Ozean-gezeiten als Störgrößen aus der Zeitreihe zu eliminieren. Bislang konnte diese Aufgabe nur mit Kenntnis der exakten Frequenzen gelöst werden. Da die Partialtiden hauptsächlich im hochfrequenten Bereich von 12 bis 24 Stunden liegen, befinden sich zwischen den einzelnen Datenpunkten mehrere Perioden. Im Fourierspektrum der Datenreihe sind dann lediglich die langperiodischen Aliasfrequenzen zu erkennen, die dann mit Hilfe der Zyklusfrequenz in die tatsächlichen Perioden der Partialtiden umgerechnet werden müssen. Jedoch sind Aliasfrequenzen nur für gleichabständige Daten definiert. Folglich kann diese Vorgehensweise nicht auf Datenreihen von Satelliten mit unterschiedlichen Zykluslängen angewendet werden.

Mit dem in dieser Arbeit beschriebenen Verfahren gelingt es erstmalig, die tatsächlichen Partialtiden anhand der unregelmäßigen Zeitreihe empirisch zu bestimm-

men, ohne den Umweg über die Aliasfrequenzen zu gehen. Das Ausgangsintervall für die Frequenzen wird mit $X = [0; 3]$ Schwingungen pro Tag angesetzt. Die Größe der Intervallbreite ist beachtlich, denn die theoretische Nyquist-Frequenz liegt bei $360 \div 4147 \approx 0.087$ Schwingungen pro Tag. Über diese Frequenz hinaus würde sich das Spektrum wiederholen, falls die Daten gleichabständig wären. Allerdings kann die Unregelmäßigkeit der Daten dazu genutzt werden, die Maxima des gesamten Spektrums von $[0; 3]$ Schwingungen pro Tag zu finden.

Bei Verwendung des im Kapitel 2 beschriebenen Verfahrens erzielt der Modellansatz mit $m = 10$ Frequenzen das Resultat gemäß Tab. 3, ohne dass a priori Informationen über die Periodizitäten eingebracht werden. Sieben der zehn Frequenzen können eindeutig den theoretischen Partialtiden zugeordnet werden. Die Standardabweichung der Datenreihe verbessert sich mit Hilfe des Modells von ursprünglich 24 cm auf 6 cm. Der Modellansatz mit 10 Frequenzen ist willkürlich gewählt. Die Hinzunahme weiterer Frequenzen ist so lange sinnvoll bis die Amplituden die Signifikanzgrenze (30) unterschreiten. Bei 50 Frequenzen sinkt die Standardabweichung auf 3 cm. Die Amplituden erreichen den nicht mehr signifikanten Wert von 0.9 cm.

Tab. 3: In der Altimeterdatenreihe gefundene Periodizitäten und zugeordnete Partialtiden

| Frequenz [1/Tag] | Amplitude [cm] | Partialtide |
|------------------|----------------|-------------|
| 1.932 | 0.24 | M2 |
| 1.002 | 0.11 | K1 |
| 0.929 | 0.10 | O1 |
| 2.000 | 0.08 | S2 |
| 1.895 | 0.06 | N2 |
| 0.997 | 0.05 | P1 |
| 0.922 | 0.03 | |
| 0.604 | 0.02 | |
| 0.008 | 0.02 | |
| 2.006 | 0.02 | K2 |

4 Schlussfolgerungen

Die dargestellte Methode berechnet die optimale Anpassung (im Sinne der Minimierung der Residuenquadrate) einer harmonischen Schwingung an eine Zeitreihe. Während der Algorithmus im eindimensionalen Fall stets die globale Lösung findet, kann eine sequenzielle Frequenzsuche dies für den Fall mehrerer Frequenzen nicht gewährleisten. Für die Datensimulation konnte jedoch die globale Lösung nachgewiesen werden. Der Erfolg des mehrdimensionalen Verfahrens beruht darauf, dass das eindimensionale Verfahren gute Näherungs-

werte für die sich anschließende Ausgleichung bereitstellt. Der Rechenaufwand ist relativ gering, da nicht alle stationären Punkte überprüft werden müssen. Der Algorithmus ist gegenüber Datenlücken und unregelmäßiger Verteilung der Datenpunkte robust.

Für den Fall, dass die exakte multidimensionale Lösung benötigt wird, sei auf das mehrdimensionale Intervall-Newton-Verfahren von Xu (2003b) verwiesen. Der damit verbundene, kaum zu bewältigende Rechenaufwand lässt sich mit Hilfe von Xu (2003a) verringern, indem die Berechnung der Intervalle so »eng« wie möglich erfolgt.

Heuristische Verfahren zur Suche nach Frequenzen in Zeitreihen (Mautz 2001, 2002), können nicht einmal die optimale Lösung für eine Frequenz garantieren. Es lassen sich jedoch praktikable Lösungen finden, vorausgesetzt, dass die Parameter eines heuristischen Verfahrens zuvor »per Hand« auf die vorliegenden Daten angepasst wurden.

Obwohl ihre Nachteile allgemein bekannt sind, gelten die Fourierreihe und die Fouriertransformation als das wichtigste Werkzeug bei der Untersuchung von Frequenzen in Zeitreihen. Es handelt sich um ein eindimensionales Verfahren, das nicht die optimale Lösung liefert und im Fall von Datenlücken zu Fehlinterpretationen in den Periodizitäten führt.

Literatur

- Hansen, E. R.: Global optimization using interval analysis – the one dimensional case. *J. of Optimization Theory and Applications* 29, S. 331–344, 1979.
- Hansen, E. R.: Global optimization using interval analysis. *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics* 165, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.
- Heeks, J.: Charakterisierung unsicherer Systeme mit intervallarithmetischen Methoden 919, Reihe 8, Fortschritt-Berichte VDI, VDI Verlag, Düsseldorf, 2002.
- Jochmann, H.: Die modifizierte Fourier-Analyse einer zweidimensionalen Bewegung. *ZfV* 118 (1), S. 6–10, 1993.
- Kaschenz, J.: Mehrdimensionale Spektralanalyse mittels problemorientierter Frequenzen. Diplomarbeit an der Technischen Universität Berlin, 2002.
- Kaschenz, J.: Datenmodellierung mittels verschiedener Frequenzreihen. *zfv* 128 (4), S. 260–265, 2003.
- Kutterer, H.: Intervallmathematische Behandlung endlicher Unschärfen linearer Ausgleichungsmodelle. *Deutsche Geodätische Kommission C 423*, München, 1994.
- Kutterer, H.: Zum Umgang mit Ungewissheit in der Geodäsie – Bausteine für eine neue Fehlertheorie. *Deutsche Geodätische Kommission C 553*, München, 2002.
- Lomb, N. R.: Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science* 39, S. 447–462, 1976.
- Mautz, R.: Zur Lösung nichtlinearer Ausgleichungsprobleme bei der Bestimmung von Frequenzen in Zeitreihen. *Deutsche Geodätische Kommission C 532*, München, 2001.
- Mautz, R.: Solving Nonlinear Adjustment Problems by Global Optimization. *Bollettino di Geodesia e Scienze Affini* 61 (2), S. 123–134, 2002.
- Moore, R.: *Interval Analysis*, Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- Press, W. H. und Rybicki, G. B.: Fast algorithm for spectral analysis of unevenly sampled data. *The Astrophysical Journal* 338, S. 277–280, 1989.
- Ratz, D.: Automatische Ergebnisverifikation bei globalen Optimierungsproblemen. Universität Karlsruhe; Institut für Angewandte Mathematik. Dissertation. 1992.
- Scargle, J. D.: Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal* 263, S. 835–853, 1982.
- Schlittgen, R. und Streitberg B.: *Zeitreihenanalyse*. R. Oldenburg Verlag, München, Wien, 1984.
- Schön, S.: Analyse und Optimierung geodätischer Messanordnungen unter besonderer Berücksichtigung des Intervallansatzes. *Deutsche Geodätische Kommission C 567*, München, 2003.
- Schuh, H., Nagel, S. und Seitz, T.: Linear drift and periodic variations observed in long time series of polar motion. *Journal of Geodesy* 74, S. 701–710, 2001.
- Schulz, M. und Stattegger, K.: SPECTRUM: Spectral analysis of unevenly spaced paleoclimatic time series. *Computers and Geosciences* 23, S. 929–945, 1997.
- Schwetlick, H.: Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen. R. Oldenburg Verlag, München, Wien, 1979.
- Sullivan, M.: Two methods refine spectral-peak location to within fractions of an FFT bin. *Personal Engineering & Instrumentation News*, August 1996, S. 65–66, 1996.
- Teunissen, P.: Nonlinear least squares. *Manuscripta Geodetica* 15, S. 137–150, 1990.
- Van Dongen, H. P. A., Olofsen, E., Van Hartevelt, J. H. und Kruyt E. W.: A procedure of multiple period searching in unequally spaced time-series with the Lomb-Scargle method. *Biological Rhythm Research* 30, S. 149–177, 1999.
- Xu, G.: Spectral Analysis and Geopotential Determination. *Deutsche Geodätische Kommission C 397*, München, 1992.
- Xu, P.: A hybrid global optimization method: the one-dimensional case. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 147, S. 301–314, 2002.
- Xu, P.: Numerical solution for bounding feasible point sets. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 156, S. 201–319, 2003a.
- Xu, P.: A hybrid global optimization method: the multi-dimensional case. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 155, S. 423–446, 2003b.

Anschrift der Autoren

Dr.-Ing. Rainer Mautz
 Institut für Astronomische, Physikalische und Mathematische
 Geodäsie, Technische Universität Berlin, Sekr. H12
 Straße des 17. Juni 135
 10623 Berlin
 Tel.: +49 30 31426114
 Fax: +49 30 31421973
 rainer@mca.bv.tu-berlin.de

Privatdozent Dr. techn. habil. Svetozar Petrovic
 GeoForschungsZentrum Potsdam
 Department 1: Geodäsie und Fernerkundung
 Sektion 1.3: Gravitationsfeld und Erdmodelle
 Telegrafenberg C3
 14473 Potsdam
 Tel.: +49 331 2881741
 Fax: +49 331-2881732
 sp@gfz-potsdam.de