

# Zur zweistufigen Analyse bei der Modellbildung von Deformationen geodätischer Netze

Gilad Even-Tzur und Andreas Gollenstede

## Zusammenfassung

In der Analyse von Deformationsvorgängen bieten sich zwei mögliche Auswertestrategien an. In einer einstufigen Analyse können die Beobachtungen der einzelnen Epochen einer gemeinsamen Ausgleichung unterzogen werden, bei der neben dem Parametervektor der Netzpunkte auch die Parameter einer Modellierung bestimmt werden. In einer zweistufigen Analyse können im ersten Schritt die Einzelepochen getrennt ausgewertet und die jeweiligen Parametervektoren für die Epochen bestimmt werden. Die resultierenden Parametervektoren werden in einem zweiten Schritt als Pseudo-Beobachtungen in eine Ausgleichung eingeführt, in der die Parameter des Modells berechnet werden.

Der erhebliche Vorteil der einstufigen Analyse besteht darin, dass die resultierende Varianz der Gewichtseinheit zutreffend bestimmt wird und ihre Nutzung für statistische Tests daher unproblematisch ist. Allerdings können in der Regel die Genauigkeitsverhältnisse der Einzelepochen nur grob abgeschätzt werden, so dass im Allgemeinen die Kofaktormatrix der Beobachtungen unkorrekt sein wird.

Bei einer zweistufigen Analyse hingegen werden für die Parametervektoren der Einzelepochen Kovarianzmatrizen erzeugt, die sich für den Ansatz der Kofaktormatrix der Pseudo-Beobachtungen korrekt verwenden lassen. Daher werden im Rahmen dieser Arbeit das Vorgehen und die Eigenschaften einer zweistufigen Analyse untersucht. Besondere Beachtung soll dabei der Bestimmung der korrekten Varianz der Gewichtseinheit auch für diese Auswertestrategie gewidmet werden, da sie für weitere Untersuchungen der Deformationen der kritische Wert ist.

## Summary

*For analysing deformation networks, two evaluation strategies are possible. The adjustment of observations of specific epochs can be estimated simultaneously using the one-step analysis. Beside of the vector of parameters of the network points, the parameters of the deformation model are determined. Using the two-step analysis, the geodetic measurements can be processed separately in the first step. This step determines the adjusted co-ordinates of the network points for each epoch. The resulting vectors of these parameters will be used as pseudo measurements in the second step. The parameters of the deformation model are obtained after the second adjustment process.*

*The main advantages of the one-step analysis are that the resulting variance is correctly determined and its use for statistic tests is unproblematic. However, the precision of the epochs is usually estimated only roughly and as a result, the cofactor matrix of the measurements will be incorrect in general.*

*In the two-step analysis, the variance-covariance matrix for the vector of parameters is calculated for every single epoch. These matrices are used for setting up the cofactor matrix of the pseudo measurements correctly. Therefore, in the context of this paper the procedure and the characteristics of the two-step analysis are examined. Special attention is paid to the estimation of the correct variance for this evaluation strategy, because it is the critical parameter for the further investigations of deformations.*

## 1 Einführung in die ein- und zweistufige Analyse

In der Literatur finden sich verschiedene Lösungsansätze für die einstufige Analyse. Tapley (1976) wählt einen Kollokationsansatz unter Nutzung des Schätzprinzips der kleinsten Quadrate. Wolf (1977), Papo (1986) und Perelmutter (1987) ziehen die »Extended Free Net Solution« vor. Papo und Perelmutter (1993) beschreiben eine Lösung, die auf beiden Ansätzen beruht. In diesem Aufsatz soll der Kollokationsansatz zur Anwendung kommen.

Gegeben sei ein Vektor  $\mathbf{l}$ , der die zu  $k$  Epochen gemessenen Beobachtungen enthält. Der funktionale Zusammenhang zwischen  $\mathbf{l}$  und den zu schätzenden Deformationsparametern  $\mathbf{s}$  lässt sich beschreiben durch das Modell

$$\mathbf{l} + \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{s}}, \quad (1)$$

mit dem Verbesserungsvektor  $\bar{\mathbf{v}}$  und der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{C}$ . Die Berechnung der geschätzten Parameter  $\hat{\mathbf{s}}$  erfolgt unter der Minimumsbedingung

$$\Omega = \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{v}} \rightarrow \min. \quad (2)$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate. Gerade im Hinblick auf einen nachfolgenden Vergleich mit der zweistufigen Analyse lässt sich die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{C}$  auch als Produkt der Koeffizientenmatrix der Messungen  $\mathbf{A}$  und der Koeffizientenmatrix des Deformationsmodells  $\mathbf{B}$  schreiben:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}. \quad (3)$$

Der Verbesserungsvektor kann in zwei Komponenten zerlegt werden:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{w}, \quad (4)$$

worin  $\mathbf{v}$  für das Messrauschen und  $\mathbf{w}$  für den Verbesserungsvektor der zweiten Stufe der Analyse steht. Schließlich lässt sich das Modell (1) mit (3) und (4) insgesamt als

$$\mathbf{1} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{B}\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A}\mathbf{w} \quad (5)$$

(Grundgleichung der Kollokation) schreiben und unter der Annahme, dass  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  unkorreliert sind, mittels der einleitend erwähnten Lösungsansätze (u. a. Tapley 1976, Wolf 1977) lösen. Der Beobachtungsvektor  $\mathbf{1}$  ist also behaftet mit einem stochastischen Anteil  $\mathbf{v}$ , dem Messrauschen, sowie dem Anteil  $\mathbf{A}\mathbf{w}$ , der die unregelmäßig-systematischen Änderungen der Deformationsvorgänge beschreibt, und einem regelmäßig-systematischen Anteil  $\mathbf{A}\mathbf{B}\hat{\mathbf{s}}$ , dem Trend (vgl. Welsch et al. 2000).

Für die Bestimmung des Lösungsvektors  $\hat{\mathbf{s}}$  im Gauß-Markov-Modell gilt nach Niemeier (2002) die Formel

$$\hat{\mathbf{s}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{1}. \quad (6)$$

Dabei ist die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_{\bar{v}}$  die Inverse der Kofaktormatrix der Verbesserungen:

$$\mathbf{P}_{\bar{v}} = \mathbf{Q}_{\bar{v}}^{-1}. \quad (7)$$

Die Kofaktormatrix für den Parametervektor  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{s}}}$  erhält man aus

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{s}}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{C})^{-1} \quad (8)$$

und damit die Kovarianzmatrix für den Parametervektor  $\mathbf{\Sigma}_{\hat{\mathbf{s}}}$  aus

$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{\mathbf{s}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{s}}} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega}{r} = \frac{\bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \bar{\mathbf{v}}}{r}. \quad (9)$$

Dabei ist  $\Omega$  die Verbesserungsquadratsumme und  $r$  die Anzahl der Freiheitsgrade in der einstufigen Analyse, also die Anzahl der redundanten Beobachtungen im angesetzten Modell (6). Es gilt

$$r = n - u, \quad (10)$$

wobei  $n$  gleich der Anzahl aller Beobachtungen und  $u$  gleich der Anzahl der unbekannt Parameter ist.

Bei der zweistufigen Analyse wird ausgehend von den Beobachtungen  $\mathbf{1}$ , die mit dem Messrauschen  $\mathbf{v}$  behaftet sind, zunächst der Lösungsvektor  $\hat{\mathbf{x}}$  in einem ersten Schritt unter der Minimumsbedingung  $\Omega_1 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min.$  berechnet. Das funktionale Modell lässt sich wie gewohnt durch

$$\mathbf{1} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (11)$$

ausdrücken. Im zweiten Schritt der Auswertung werden die ausgeglichenen Parameter  $\hat{\mathbf{x}}$  der ersten Stufe als Pseudobeobachtungen eingeführt und die geschätzten Parameter  $\hat{\mathbf{s}}$  unter der Bedingung  $\Omega_{II} = \mathbf{w}^T \mathbf{P} \mathbf{w} \rightarrow \min.$  berechnet. Das funktionale Modell soll hier

$$\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{w} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{s}} \quad (12)$$

sein. Setzt man (12) in (11) ein, so erhält man wiederum den aus der einstufigen Analyse bekannten Ansatz (5):

$$\mathbf{1} + \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{w}) = \mathbf{A}\mathbf{B}\hat{\mathbf{s}} - \mathbf{A}\mathbf{w}. \quad (13)$$

Die Formeln der zweistufigen Analyse lassen sich, wie noch gezeigt wird, aus der einstufigen Analyse herleiten. Ein- und zweistufiger Ansatz führen damit zunächst zu identischen Ergebnissen.

## 2 Die zweistufige Analyse

### 2.1 Getrennte Ausgleichung der Einzelepochen im ersten Schritt

Im ersten Schritt der zweistufigen Analyse werden die ausgeglichenen Koordinaten der Netzknoten der Einzelepochen nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt (siehe z. B. Niemeier 2002). Grundlage sind die je Epoche  $i$  vorliegenden Messungen  $\mathbf{1}_i$  zwischen den Netzknoten. Bei  $k$  Epochen ergeben sich nach Gleichung (11) genau  $k$  funktionale Zusammenhänge

$$\mathbf{1}_i + \mathbf{v}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, k, \quad (14)$$

jeweils mit den Gewichtsmatrizen bzw. den Kofaktormatrizen

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_{II_i}^{-1} \quad (15)$$

der Beobachtungen  $\mathbf{1}_i$ . Jeder Parametersatz  $\mathbf{x}$  kann unabhängig geschätzt werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_i = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{1}_i. \quad (16)$$

Die Kofaktormatrizen der ausgeglichenen Parameter ergeben sich aus

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} = (\mathbf{A}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_i)^{-1}. \quad (17)$$

Schließlich errechnen sich die Kovarianzmatrizen der ausgeglichenen Parameter mittels

$$\mathbf{\Sigma}_{\hat{\mathbf{x}}_i} = \hat{\sigma}_{0_i}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} \quad \text{mit} \quad \hat{\sigma}_{0_i}^2 = \frac{\Omega_{II_i}}{r_{II_i}} \quad (18)$$

mit den Freiheitsgraden  $r_{I_i}$ , auf die weiter unten noch genauer eingegangen wird, und der Verbesserungsquadratsumme

$$\Omega_{I_i} = \hat{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{v}}_i. \quad (19)$$

Nun lässt sich eine Lösung für alle Beobachtungen zusammenfassen zu

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (20)$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & & & \\ & \mathbf{P}_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \mathbf{P}_k \end{bmatrix}, \mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_k \end{bmatrix} \quad (21)$$

und der zugehörigen Kofaktormatrix

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}1} & & & \\ & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}k} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Als Ergebnis erhält man den Lösungsvektor

$$\hat{\mathbf{x}}^T = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \dots \quad \hat{x}_k], \quad (23)$$

den Vektor der Verbesserungen

$$\mathbf{v}^T = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_k] \quad (24)$$

und damit die über alle Epochen zusammengefasste Verbesserungsquadratsumme der ersten Stufe

$$\begin{aligned} \Omega_I &= \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{II}^{-1} \mathbf{v} \\ &= \mathbf{v}_1^T \mathbf{Q}_{II1}^{-1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{Q}_{II2}^{-1} \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_k^T \mathbf{Q}_{IIk}^{-1} \mathbf{v}_k \\ &= \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{IIi}^{-1} \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (25)$$

Die Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Parameter ist schließlich

$$\begin{aligned} \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{01}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}1} & & & \\ & \hat{\sigma}_{02}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \hat{\sigma}_{0k}^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}k} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}1} & & & \\ & \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}2} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

## 2.2 Herleitung des zweiten Schrittes der zweistufigen Analyse aus der einstufigen Analyse

Die im ersten Schritt geschätzten Parameter  $\hat{\mathbf{x}}$  werden, wie oben beschrieben, im zweiten Schritt als Pseudo-beobachtungen eingeführt. Das funktionale Modell lässt sich beschreiben durch (12). Darin ist  $\hat{\mathbf{s}}$  der Vektor der geschätzten Deformationsparameter. Der Verbesserungsvektor

$$\mathbf{w} = \mathbf{z} + \mathbf{v}_{\hat{\mathbf{x}}} \quad (27)$$

enthält einen systematischen Anteil  $\mathbf{z}$  und einen Anteil  $\mathbf{v}_{\hat{\mathbf{x}}}$ , der das eigentliche Rauschen (Noise) beschreibt. Für den Verbesserungsvektor  $\bar{\mathbf{v}}$  gilt Gleichung (4) und mit dem Varianz-Fortpflanzungsgesetz ergibt sich für die Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}}$  von  $\bar{\mathbf{v}}$

$$\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_{vv} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{ww} \mathbf{A}^T. \quad (28)$$

Die Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{ww}$  ist nach Anwendung des Varianz-Fortpflanzungsgesetzes auf (27) die Summe der Kofaktormatrizen  $\mathbf{Q}_{zz}$  und  $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ :

$$\mathbf{Q}_{ww} = \mathbf{Q}_{zz} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}. \quad (29)$$

Damit lässt sich die Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}}$  umformen zu

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}} &= \mathbf{Q}_{vv} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{ww} \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{Q}_{II} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{A} (\mathbf{Q}_{zz} + \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}) \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{Q}_{II} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}^T + \underbrace{\mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^T}_{\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}} \\ &= \mathbf{Q}_{II} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}^T \end{aligned} \quad (30)$$

Die Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}}$  ist dann

$$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{v}}}^{-1} = (\mathbf{Q}_{II} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{zz} \mathbf{A}^T)^{-1}. \quad (31)$$

Die Verbesserungsquadratsumme  $\Omega_{II}$  lässt sich herleiten zu

$$\begin{aligned} \Omega_{II} &= \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} \bar{\mathbf{v}} \\ &= (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{w})^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{w}^T \mathbf{A}^T + \mathbf{v}^T) \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} (\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{w}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} \mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{v}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{v}}} \mathbf{A} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (32)$$

Wenn  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{D}$  invertierbar sind, gilt die folgende Matrix-Identität:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BDC})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{CA}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{CA}^{-1}. \quad (33)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\bar{v}} &= (\mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{A}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{Q}_{ll}^{-1} - \mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{Q}_{zz}^{-1} + \mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{ll}^{-1} \\ &= \mathbf{Q}_{ll}^{-1} - \mathbf{Q}_{ll}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{Q}_{zz}^{-1} + \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Q}_{ll}^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \Omega_{ll} &= \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \bar{\mathbf{v}} \\ &= \mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{v} + \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} (\mathbf{Q}_{zz}^{-1} + \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}) \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w} \\ &= \Omega_l + \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} (\mathbf{Q}_{zz}^{-1} + \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}) \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (35)$$

Betrachtet man den Sonderfall, dass die Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{zz}$  gegen die Nullmatrix konvergiert ( $\mathbf{Q}_{zz} \rightarrow \mathbf{0}$ ), dann geht auch der letzte Term gegen Null

$$\lim_{\mathbf{Q}_{zz} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} (\mathbf{Q}_{zz}^{-1} + \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}) \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (36)$$

Die Verbesserungsquadratsumme  $\Omega_{ll}$  lässt sich damit vereinfacht schreiben als

$$\Omega_{ll} = \Omega_l + \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w}. \quad (37)$$

Die zu geschätzten Parameter ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= (\mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (38)$$

bzw. für den oben betrachteten Sonderfall  $\mathbf{Q}_{zz} \rightarrow \mathbf{0}$  aus

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= (\mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Die Kofaktormatrix der ausgeglichenen Parameter lautet dann

$$\mathbf{Q}_{\hat{s}\hat{s}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{P}_{\bar{v}} \mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T (\mathbf{Q}_{ll} + \mathbf{A}\mathbf{Q}_{zz}\mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} \quad (40)$$

und für den Sonderfall  $\mathbf{Q}_{zz} \rightarrow \mathbf{0}$

$$\mathbf{Q}_{\hat{s}\hat{s}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ll}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{B})^{-1}. \quad (41)$$

### 3 Gewichtsmatrizen und Genauigkeitsmaß für die zweistufige Analyse

#### 3.1 Betrachtung der Freiheitsgrade

In der zweistufigen Analyse ergibt sich für die erste Stufe nach Gleichung (20) für die Freiheitsgrade einer Epoche  $i$

$$r_{li} = n_{li} - u_{li}. \quad (42)$$

Dabei ist die Anzahl der Freiheitsgrade  $r_l$  gleich der Summe der Freiheitsgrade aller  $k$  Epochen:

$$r_l = \sum_{i=1}^k r_{li}. \quad (43)$$

Für die zweite Stufe (39) gilt

$$r_{ll} = n_{ll} - u_{ll}. \quad (44)$$

Da die  $u_l$  Unbekannten der ersten Stufe als  $n_{ll}$  Pseudo-beobachtungen in die zweite Stufe eingeführt werden, d.h. die Anzahl der Spalten der Matrix  $\mathbf{A}$  gleich der Spaltenanzahl der Matrix  $\mathbf{B}$  ist, gilt damit  $u_l = n_{ll}$  und es ergibt sich

$$r_l + r_{ll} = n_l - u_l + n_{ll} - u_{ll} = n_l - u_{ll}. \quad (45)$$

Anders ausgedrückt ist somit die Anzahl der Freiheitsgrade der einstufigen Analyse gleich der Summe der Freiheitsgrade beider Schritte der zweistufigen Analyse. Ein möglicherweise auftretender Datumsdefekt ist durch die Festlegung einer notwendigen Mindestanzahl von Parametern  $u_l$  zu vermeiden.

#### 3.2 Gewichtsmatrizen für die erste Stufe

Auf die Aufstellung der Gewichtsmatrizen der Einzel-epochen in der ersten Stufe soll hier nicht weiter eingegangen werden. Hier wird auf die einschlägige Fachliteratur (wie z. B. Niemeier 2002) verwiesen. Von entscheidender Bedeutung für die vorgestellte Berechnungsmethode ist vielmehr die Festlegung der Gewichtsmatrix der zweiten Stufe.

#### 3.3 Eine Gewichtsmatrix für die zweite Stufe

Als Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_{\hat{x}\hat{x}}$  der Pseudobeobachtungen  $\hat{\mathbf{x}}$  für den zweiten Schritt wird die Inverse der im ersten Schritt gewonnenen Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$  aus (22) eingeführt. Es gilt also

$$\mathbf{P}_{\hat{x}\hat{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}. \quad (46)$$

Für die Varianz der Gewichtseinheit  $\hat{\sigma}_0^2$  der zweistufigen Auswertung wird sowohl  $\mathbf{w}$  aus der zweiten Stufe als auch  $\mathbf{v}$  aus der ersten Stufe berücksichtigt, wie in (35) zu erkennen ist. Daher sind die jeweiligen Freiheitsgrade ebenfalls zu berücksichtigen. Eine Nichtbeachtung von  $r_l$  bei der Bestimmung der Varianz der Gewichtseinheit würde eine zu optimistische Fehlerabschätzung zur Folge haben (Even-Tzur 2002). Damit ergibt sich

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega_I + \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} (\mathbf{Q}_{zz}^{-1} + \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}) \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w}}{r_I + r_{II}}. \quad (47)$$

Für  $\mathbf{Q}_{zz} \rightarrow \mathbf{0}$ , also den bereits betrachteten Sonderfall, folgt aus (37)

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega_I + \mathbf{w}_i^T \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}_i}^{-1} \mathbf{w}_i}{r_I + r_{II}}. \quad (48)$$

Die Verwendung der Gleichung (47) bzw. (48) führt zu einem mit der einstufigen Analyse identischen Ergebnis.

### 3.4 Eine skalierte Gewichtsmatrix für die zweite Stufe

Besondere Beachtung soll die Möglichkeit der Einführung einer verbesserten Gewichtsmatrix  $\bar{\mathbf{P}}_{\hat{x}\hat{x}} = \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}$  der Pseudobeobachtungen  $\hat{\mathbf{x}}$  finden. Für das Aufstellen der Gewichtsmatrix bzw. der Kofaktormatrix wird nun an Stelle der Kofaktormatrix  $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$  aus (22) die Kovarianzmatrix  $\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}$  aus (26) verwendet, d. h.

$$\bar{\mathbf{Q}}_{\hat{x}\hat{x}} = \Sigma_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} = \hat{\sigma}_0^{-2} \mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} = \bar{\mathbf{P}}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}. \quad (49)$$

Für die Bestimmung der Varianz der Gewichtseinheit  $\hat{\sigma}_0^2$  finden, wie oben beschrieben, sowohl  $\mathbf{w}$  aus der zweiten Stufe als auch  $\mathbf{v}$  aus der ersten Stufe Berücksichtigung. Durch die Verwendung der Kovarianzmatrix an Stelle der Kofaktormatrix wurden die  $1/\hat{\sigma}_{0i}^2$  bzw. die  $\hat{\sigma}_{0i}^2$  der ersten Stufe als Skalierungsfaktoren an die Gewichtsmatrizen  $\bar{\mathbf{P}}_{\hat{x}\hat{x}_i}$  bzw. die  $\mathbf{Q}_{\hat{x}\hat{x}_i}$  angebracht. Um die Relationen zwischen den beiden Stufen bei der Bestimmung des  $\hat{\sigma}_0^2$  der zweiten Stufe zu erhalten, müssen die zur Berechnung herangezogenen Matrizen  $\mathbf{Q}_{II_i}$  ebenfalls mit den  $\hat{\sigma}_{0i}^2$  skaliert werden. Epochenweise betrachtet ergeben sich  $k$  korrigierte Kofaktormatrizen

$$\bar{\mathbf{Q}}_{II_i} = \sigma_{0i}^2 \mathbf{Q}_{II_i} = \frac{\mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{II_i}^{-1} \mathbf{v}_i}{r_{II_i}} \mathbf{Q}_{II_i}. \quad (50)$$

Damit wird die Verbesserungsquadratsumme  $\Omega_{II_i}$  aus (25) zu

$$\bar{\Omega}_{II_i} = \mathbf{v}_i^T \bar{\mathbf{Q}}_{II_i}^{-1} \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \frac{r_{II_i}}{\mathbf{v}_i^T \mathbf{Q}_{II_i}^{-1} \mathbf{v}_i} \mathbf{Q}_{II_i}^{-1} \mathbf{v}_i = r_{II_i} \quad (51)$$

und über alle Epochen gemeinsam betrachtet zu

$$\bar{\Omega}_I = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i^T \bar{\mathbf{Q}}_{II_i}^{-1} \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k r_{II_i}. \quad (52)$$

Für das Genauigkeitsmaß der geschätzten Parameter  $\hat{\mathbf{s}}$  der zweistufigen Auswertung ergibt sich dann eine modifizierte Gleichung (47):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\bar{\Omega}_I + \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{Q}}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w} - \mathbf{w}^T \bar{\mathbf{Q}}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} (\mathbf{Q}_{zz}^{-1} + \bar{\mathbf{Q}}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1}) \bar{\mathbf{Q}}_{\hat{x}\hat{x}}^{-1} \mathbf{w}}{r_I + r_{II}}. \quad (53)$$

Für den Sonderfall  $\mathbf{Q}_{zz} \rightarrow \mathbf{0}$  folgt eine veränderte Formel (48):

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\bar{\Omega}_I + \mathbf{w}_i^T \bar{\mathbf{Q}}_{\hat{x}\hat{x}_i}^{-1} \mathbf{w}_i}{r_I + r_{II}}. \quad (54)$$

Es ist ersichtlich, dass lediglich die zweistufige Analyse die Gelegenheit bietet eine verbesserte Gewichtsmatrix  $\bar{\mathbf{P}}_{\hat{x}\hat{x}}$  in die Berechnungen einzuführen. Die Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert im ersten Schritt die Möglichkeit, für eine in der ersten Stufe angesetzte a priori Varianz einen Schätzwert  $\hat{\sigma}_{0i}^2$  zu bestimmen. Damit können alle Einzelepochen, die eventuell unter unterschiedlichen Bedingungen gemessen wurden, relativ zueinander gewichtet und entsprechend in den zweiten Schritt eingeführt werden.

## 4 Beispiel Höhennetz

### 4.1 Vorbemerkung

Die Analyse eines Höhennetzes basierend auf Untersuchungen von Ananga (1991) dient im Nachfolgenden als gut nachvollziehbares Einzelbeispiel für die zweistufige Auswertung. Die Messungen wurden im nördlichen Israel von Oktober 1988 bis September 1989 durchgeführt (vgl. auch Papo und Perelmutter 1993).

Zwei Lösungsansätze werden gegenübergestellt. In einem ersten Ansatz führt die Verwendung einer einfachen Gewichtsmatrix (46) zunächst zu einem mit der einstufigen Analyse identischen Ergebnis. Erst die Einführung der verbesserten Gewichtsmatrix (49) im zweiten Lösungsansatz zeigt deutlich die Stärken der Zweistufigkeit.

Eine mögliche Abhängigkeit von der zugrunde liegenden Netzgeometrie sollte bei der Beurteilung der Ergebnisse dieses Einzelbeispiels nicht vergessen werden. Andererseits soll im begrenzten Rahmen dieses Artikels nicht der Beweis für die allgemeine Wirksamkeit des Verfahrens geführt werden.

### 4.2 Datengrundlage

Das Höhennetz besteht aus 11 Punkten (siehe Abb. 1). Die Punkte  $P_{100,200,300}$  liegen auf festem Untergrund und werden hier als invariabel betrachtet. Die Höhen der restlichen Punkte  $P_{4-11}$  werden als jahreszeitlich variabel angenommen. Zu vier charakteristischen Zeitpunkten  $t_{1-4}$  innerhalb eines Jahres wurden im Abstand von zwei bis vier Monaten (siehe Tab. 1) jeweils 14 Höhenunterschiede hoch genau bestimmt.

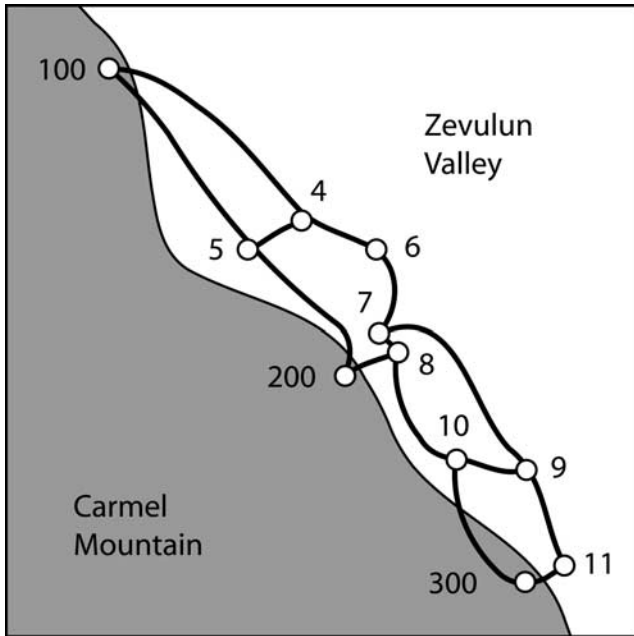


Abb. 1: Schematische Darstellung des Höhenetzes im nördlichen Israel

Tab. 1: Verteilung der Epochen über den Messzeitraum  $T$  von einem Jahr

Epoche $i$	1	2	3	4
$t_i - t_0$ (Jahre)	0.000	0.167	0.500	0.833

Die Bewegung der Punkte lässt sich durch das in Papo und Perelmutter (1993) angegebene vereinfachte physikalische Modell

$$h_i = h_0 + v(t_i - t_0) - c \frac{T}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t_i - t_0)\right) \quad (55)$$

beschreiben. Darin steht  $T$  für die Zyklusperiode von einem Jahr. Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  wurde die Ausgangshöhe  $h_0$  festgelegt. Die Höhen  $h_i$  wurden zum Zeitpunkt  $t_i$  bestimmt. Eine vertikale Geschwindigkeitskomponente  $v = \dot{h}_0$ , sowie ein Koeffizient  $c$ , der das Anschwellen und Schrumpfen des Untergrundes beschreiben soll, komplettieren das Modell. Um einige Aspekte besser verdeutlichen zu können, wurden die Originaldaten für dieses Beispiel modifiziert. Ausgehend von den Ausgangshöhen (siehe Tab. 2) wurden die Höhen der Punkte zu den vier Epochen berechnet. In einem nächsten Schritt wurden die jeweiligen Beobachtungen erzeugt und mit einem Messrauschen (siehe Tab. 3) überlagert.

Um das Potential der zweistufigen Analyse besonders verdeutlichen zu können, wurde ein zweiter Satz von Beobachtungen mit einem abgeänderten Rauschen erzeugt (siehe Tab. 3) – des Weiteren gekennzeichnet durch (\*). Der erste Wert des Beobachtungsvektors  $I_1$  wurde dazu mit einem zwanzigfach überhöhten Rauschen versehen (20.00 mm statt 1.00 mm). Die Analyse der so gewonnenen Datensätze erfolgt nun mit Hilfe der

Tab. 2: Ausgangsparameter

Punkt-Nr.	Ausgangsparameter		
	Höhe (m)	$v$ (m/s)	$c$
100	5.2298	0.000	0.000
200	9.7281	0.000	0.000
300	30.0000	0.000	0.000
4	3.2184	-0.025	0.020
5	5.9029	-0.030	0.010
6	2.5391	-0.020	0.005
7	2.9603	0.000	0.004
8	3.2899	-0.045	0.010
9	5.6341	-0.020	0.030
10	5.6995	-0.025	0.020
11	17.7766	-0.030	0.010

Tab. 3: Messrauschen und modifiziertes Messrauschen (\*)

Punkt-Nr.	Rauschen (mm) je Epoche			
	1	2	3	4
1	0.1	0.8	-0.8	-0.4
1*	20.0			
2	-0.2	1.1	1.0	-0.4
3	1.4	1.0	0.5	1.5
4	1.3	0.6	0.0	0.6
5	2.2	-0.7	-0.3	1.6
6	2.0	1.0	-0.2	2.5
7	0.0	0.0	-0.2	0.0
8	0.2	-0.2	-0.7	-1.0
9	-1.3	-0.2	0.2	-0.6
10	-0.2	0.2	0.1	1.2
11	0.4	0.7	-0.3	0.4
12	0.6	-0.1	-0.2	1.6
13	2.0	1.7	-0.6	2.3
14	0.1	-0.2	0.0	0.8

zweistufigen Methode unter Verwendung sowohl einer einfachen als auch einer skalierten Gewichtsmatrix in der zweiten Stufe.

### 4.3 Erster Schritt

Im ersten Schritt erfolgt, wie beschrieben, die separate Auswertung der einzelnen Epochen nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zu jedem Zeitpunkt  $t_{i=1,\dots,4}$  ist die Anzahl der Beobachtungen  $n_i = 14$ , die Anzahl der zu bestimmenden Parameter  $u_i = 11$  und der Datumsdefekt  $d_i = 1$ . Damit ergibt sich nach Gleichung (42) mit Berücksichtigung des Defektes für jede Epoche  $i = 1, \dots, 4$  der Freiheitsgrad  $r_{ii} = n_{ii} - u_{ii} + d_{ii} = 4$ . Für den gesamten ersten Schritt der Analyse ist nach (43) die Anzahl der Freiheitsgrade  $r_i = 16$ . Für jede Epoche  $i = 1, \dots, 4$  wird zunächst eine a priori Varianz  $\sigma_{0i}^2 = 1$  angenommen. Die Gewichte der Einzelbeobachtungen werden gleich dem Kehrwert der Längen der Strecken

Tab. 4: Länge der Strecken zwischen den Höhenpunkten

Punkt-Nr.	4	100	4	6	6	8	7	7	9	11	8	10	10	9
von-nach	100	5	5	4	7	5	8	9	11	300	200	200	300	10
Länge (km)	1.10	1.11	0.30	0.21	0.77	0.78	0.03	1.11	0.51	0.20	0.19	0.86	0.75	0.31

zwischen den Punkten (siehe Tab. 4) gesetzt. Die Kovarianzmatrix einer Einzelepoch ergibt sich dann aus Gleichung (15). Ergebnis dieses ersten Schrittes sind u. a. die ausgeglichenen Parameter  $\hat{x}$  je Epoche und die Standardabweichung der Gewichtseinheit  $\hat{\sigma}_{0_i}$  je Epoche (siehe Tab. 5).

Tab. 5: Standardabweichung der Gewichtseinheit der Einzelepochen als Ergebnis des ersten Schrittes. Der zweite Wert für Epoche 1 ergibt sich mit modifiziertem Messrauschen (\*).

Epoche	1	2	3	4
	1*			
$\sigma_0$	1.5489	0.9298	0.5433	1.4407
$\sigma_0^*$	5.9677			

4.4 Zweiter Schritt

Bei allen Berechnungen soll vereinfacht  $Q_{zz} \rightarrow 0$  (oben genannter Sonderfall) gelten. Die geschätzten Parameter  $\hat{x}$  der Epochen gehen als Pseudobeobachtungen in den zweiten Schritt ein. Die als invariabel gesetzten Höhen

der Punkte  $P_{100,200,300}$  werden selbstverständlich nicht als Beobachtungen eingeführt. Damit ergibt sich  $n_{II} = u_I = 32$  als Gesamtanzahl der Beobachtungen der zweiten Stufe. Die zu schätzenden Unbekannten sind die Höhen der variablen Punkte  $P_{4-11}$  sowie jeweils deren zwei Parameter des gewählten physikalischen Modells. Daraus resultiert  $u_{II} = 24$  als Anzahl der Unbekannten. Es ergeben sich  $r_{II} = n_{II} - u_{II} = 8$  Freiheitsgrade. Bei der Berechnung der Varianz der geschätzten Parameter ist nach (48) die Summe der Freiheitsgrade  $r_I + r_{II} = 24$  zu berücksichtigen. Wird als Gewichtsmatrix  $P_{\hat{x}\hat{x}}$ , wie in (46) bereits beschreiben, lediglich die Inverse der Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Parameter aus dem ersten Schritt eingeführt, ist das Ergebnis gleich dem der einstufigen Analyse. Alternativ wird die verbesserte, mit  $1/\hat{\sigma}_0^2$  skalierte, Gewichtsmatrix  $\bar{P}_{\hat{x}\hat{x}}$  analog zu (49) in den zweiten Analyseschritt eingeführt.

4.5 Ergebnisse

Für die beiden Punkte  $P_7$  und  $P_{11}$  wurden die Ergebnisse bei modifiziertem Messrauschen (\*) tabellarisch zusammengestellt (siehe Tab. 6 und Tab. 7).

Tab. 6: Ausgegliche Parameter, Differenzen  $\Delta$  zum Ausgangswert und Standardabweichungen für die Punkte  $P_7$  und  $P_{11}$  bei modifiziertem Messrauschen (\*) unter Verwendung einer einfachen und einer verbesserten P-Matrix

		P-Matrix	H (m)	$\sigma_H$ (mm)	v (m/s)	$\sigma_v$ (mm/s)	c	$\sigma_c$
			$\Delta_H$ (mm)		$\Delta_v$ (mm/s)		$\Delta_c$	
$P_7^*$	ausgegl. Parameter	einfach	2.95574		0.00667		0.0238	
		verbessert	2.95964		0.00065		0.0123	
	$\Delta, \sigma$	einfach	4.56	2.699	-6.67	5.194	-0.0198	0.01393
		verbessert	0.66	1.110	-0.65	2.428	-0.0083	0.00403
$P_{11}^*$	ausgegl. Parameter	einfach	17.77250		-0.02524		0.0302	
		verbessert	17.77699		-0.03217		0.0169	
	$\Delta, \sigma$	einfach	4.10	3.693	-4.76	7.107	-0.0202	0.01905
		verbessert	-0.39	1.519	2.17	3.322	-0.0069	0.00551

Tab. 7: Mit den ausgeglichenen Parametern berechnete Höhen H und Differenzen  $\Delta$  zum Ausgangswert für die Punkte  $P_7$  und  $P_{11}$  bei modifiziertem Messrauschen (\*) unter Verwendung einer einfachen und einer verbesserten P-Matrix

		P-Matrix	Epoche			
			1	2	3	4
$P_7^*$	H (m)	einfach	2.95195	2.95495	2.96287	2.95940
		verbessert	2.95768	2.95877	2.96192	2.95920
	$\Delta$ (mm)	einfach	7.75	5.05	-1.97	0.60
		verbessert	2.02	1.23	-1.02	0.80
$P_{11}^*$	H (m)	einfach	17.76769	17.76589	17.76468	17.74906
		verbessert	17.77430	17.77028	17.76360	17.74883
	$\Delta$ (mm)	einfach	7.31	4.91	-1.48	1.74
		verbessert	0.70	0.52	-0.40	1.97

Es zeigt sich, dass die Ergebnisse bei erhöhtem Messrauschen und der Verwendung einer einfachen Gewichtsmatrix im zweiten Schritt nicht sehr aussagekräftig sind. Der Punkt  $P_{11}$  steht vom Niveau her dabei exemplarisch für alle weiteren Punkte  $P_i$ . Lediglich bei dem Punkt  $P_7$  führte die Schätzung des Parameters  $v$  bei beiden Lösungsansätzen zu unzufriedenstellenden Ergebnissen. Der Parameter  $c$  hingegen konnte für den Punkt  $P_7$  auch mit einer einfachen Gewichtsmatrix ausnahmsweise befriedigend bestimmt werden. Das Gesamtsystem reagiert bei Verwendung einer einfachen Gewichtsmatrix  $\bar{P}_{xx}$  extrem empfindlich auf eine erhöhtes Messrauschen. Durch den Einsatz einer verbesserten, an die Qualität der jeweiligen Einzelepoch angepassten Gewichtsmatrix  $\bar{P}_{xx}$  für den zweiten Schritt wirkt sich ein verstärktes Messrauschen weniger negativ auf das Gesamtergebnis aus. Die ebenfalls berechneten Standardabweichungen der Gewichtseinheit finden sich abschließend in Tab. 8. Hier ergeben sich für nicht modifiziertes und modifiziertes Messrauschen ähnliche Ergebnisse.

**Tab. 8: Standardabweichung der Gewichtseinheit als Ergebnis des zweiten Schrittes unter Verwendung einer einfachen und einer verbesserten P-Matrix. Die mit (\*) gekennzeichneten Werte ergeben sich bei modifiziertem Messrauschen.**

P-Matrix	einfach	verbessert
$\sigma_0$	0.0030	0.9542
$\sigma_0^*$	0.0031	0.9543

Weiterführende Bewertungen und Betrachtungen sollten auf jeden Fall auf Hypothesenprüfungen aufbauen, gerade auch um alternative Modellansätze zu (55) besser vergleichen zu können und eine sinnvolle Beurteilung hinsichtlich der Signifikanz der resultierenden Ergebnisse zu ermöglichen.

## 5 Schlussbemerkung

Der zweistufige Ansatz bei der Analyse von Deformationsvorgängen ist eine bewährte Methode. Dieser Aufsatz stellt anhand des oben gezeigten Beispiels die Vorteile des zweistufigen Ansatzes gegenüber dem einstufigen Ansatz deutlich heraus. Die zweistufige Analyse bietet die Möglichkeit zwischen dem ersten und zweiten Berechnungsschritt bereits erste Fehler- und Qualitätsbetrachtungen durchzuführen. So können unabhängig vom gewählten Deformationsmodell grobe Fehler in den Messungen aufgedeckt werden. Jede Epoche lässt sich separat einer Bewertung der Qualität unterziehen. Unter

Anpassung der a priori gesetzten Varianz der Gewichtseinheit der einzelnen Epochen kann anschließend eine weitere, besser abgestimmte relative Gewichtung zueinander vorgenommen werden. Nach einer zufriedenstellenden Bestimmung der Pseudo-Beobachtungen in der ersten Stufe erlaubt der zweite Schritt alternative Deformationsmodelle zu testen. Es wurde dargestellt, wie mit Einführung einer verbesserten Gewichtsmatrix im zweiten Schritt auch für die zweistufige Methode eine korrekte Bestimmung der Varianz der Gewichtseinheit möglich ist. Somit lässt sich die Qualität der Parameter korrekt beurteilen und als Basis für weitere Analysen der Deformationsvorgänge nutzen.

## Literatur

- Ananga, N.: Least-Squares Adjustments of Seasonal Leveling. *Journal of Surveying Engineering*, ASCE, Vol. 117, No. 2, 1991.
- Even-Tzur, G.: Variance Factor Estimation for Two-step Analysis of Deformation Networks. *Journal of Surveying Engineering*, eingereicht 2002.
- Niemeier, W.: Ausgleichsrechnung. de Gruyter, Berlin-New York, 2002.
- Papo H.B.: Extended Free Net Adjustment Constraints. NOAA Technical Report, NOS 119 NGS 37, Rockville, MD., 1986.
- Papo, H. B., Perelmuter, A.: Two-step Analysis of Dynamical Networks. *Manuscripta Geodetica*, Vol. 18, S. 422-430, 1993.
- Perelmuter, A.: Beiträge zur Ausgleichung Geodätischer Netze. Schriftenreihe universitärer Studiengang Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Nr. 25, 1987.
- Tapley, B.D.: On the Interpretation of Least Squares Collocation. In: V. Szebehely and B. D. Tapley (eds.), *Long Time Prediction in Dynamics*, S. 165-172, 1976.
- Welsch, W., Heunecke, O., Kuhlmann, H.: Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. In: M. Möser, G. Müller, H. Schlemmer (Hrsg.), *Handbuch Ingenieurgeodäsie*, H. Wichmann Verlag, Heidelberg, 2000.
- Wolf, H.: Eindeutige und Mehrdeutige Geodätische Netze. *Abhandl. d. Braunsch. Wiss. Ges.*, Band 28, Göttingen, 1977.

## Anschrift der Autoren

Dr. Gilad Even-Tzur  
 Geodetic Engineering  
 Faculty of Civil Engineering, Technion  
 Israel Institute of Technology  
 Technion City  
 Haifa 32000  
 Israel  
 eventzur@technix.technion.ac.il

Dipl.-Ing. Andreas Gollenstede  
 Institut für Mess- und Auswertetechnik  
 Fachhochschule Oldenburg/Ostfriesland/Wilhelmshaven  
 Ofener Str. 16/19  
 26121 Oldenburg  
 andreas@gollenstede.com