

# Datenmodellierung mittels verschiedener Frequenzreihen

Julia Kaschenz

## Zusammenfassung

In der Geodäsie treten häufig diskrete Messwerte auf, die Punkten eines mehrdimensionalen Raumes zugeordnet sind. Für die Modellierung solcher Daten wird eine Frequenzreihe, bestehend aus Frequenzen, die nicht in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen, eingeführt. Anhand eines Beispiels wird gezeigt, inwieweit eine Datenmodellierung mit dieser Reihe, die sich von einer traditionellen zweidimensionalen Fourierreihe unterscheidet, erfolgen kann. Dabei wird speziell auf die unterschiedliche Vorgehensweise bei der Bestimmung der jeweiligen unbekannt Parameter bei Verwendung dieser Frequenzreihen eingegangen sowie auf die erreichbaren Genauigkeiten in und zwischen den Stützpunkten.

## Summary

*Discretely measured data given at points of a multidimensional space can often be encountered in geodesy. Therefore,*

*in the present paper one frequency series for data modelling is introduced, consisting of frequencies which do not build integer ratios. On the basis of an example it is shown to what extent a modelling of data is possible using this frequency series, which is different from a traditional twodimensional Fourier series. Thereby, particular attention is paid to different procedures which are necessary for the determination of respective unknown parameters when using these two kinds of frequency series, and to the accuracy which is achievable in and between data points.*

## 1 Einleitung

Zur Auswertung und Darstellung diskreter Messdaten werden häufig mehrere sich überlagernde Schwingungen verwendet (z. B. für Schwere- oder Reliefdaten (siehe z. B.

Bath 1974)), mit denen es möglich sein sollte, diese Daten innerhalb einer gewünschten Genauigkeit zu repräsentieren. So erfolgt beispielsweise die Analyse der veränderlichen Polkoordinaten zur Bestimmung der Polbewegung mit Hilfe einer komplexen eindimensionalen Fourierreihe (Jochmann 1993). Ebenso hat z. B. in der Seismologie, Meteorologie, Ozeanographie und Hydrologie die ein- und mehrdimensionale Fourierreihe häufig Anwendung gefunden (siehe z. B. Bath 1974). Betrachtet man eine Kugelfunktionsentwicklung als eine Verallgemeinerung der Fourierreihe (Bronstein und Semendjajew 1985, Jung 1937) der Ebene bezogen auf eine Kugel, so findet die Fourierreihe zur Beschreibung des Erdschwerefeldes Anwendung (Jung 1937, Heine 1961, Bath 1974).

Werden als Frequenzen der Schwingungen lediglich die traditionellen »Fourierfrequenzen« zugelassen, kommt es oft zu einer Überparametrisierung und einer realitätsfernen Darstellung der Daten zwischen den Stützpunkten. Dass sich bei der Verwendung einer Fourierreihe mit ganzzahligen Frequenzverhältnissen bei der Auswertung realer Messdaten nicht interpretierbare Ergebnisse ergeben können, wurde z. B. in Jochmann (1993), Schuh et al. (2001), Jung (1961), Heine (1961), Tricomi (1955), Bath (1974), Mautz (2001) und Mautz (2002) festgestellt. So ist in Jochmann (1993) zu finden: »Die reine Fourier-Analyse ist zwar zur analytischen Darstellung eines periodischen Prozesses gut geeignet, versagt jedoch bei der Bestimmung einzelner, in einem Prozess enthaltener Periodizitäten, da der Frequenzabstand zwischen den einzelnen periodischen Komponenten zu groß ist.« Zur Lösung schlägt er vor: »Diesen Nachteil kann man beseitigen, wenn man die Grundperiode der Fourierreihe  $T$  wesentlich größer als die Länge  $p$  des zu untersuchenden Prozesses wählt.« Dieses Verfahren konnte »vorteilhaft zur Ermittlung der periodischen Anteile eines Prozesses angewandt werden«, z. B. zur Ermittlung der Chandler-Welle und der Jahresperiode der Polbewegung. Somit können durch die Verkleinerung der Frequenzabstände die Probleme bei der Bestimmung einzelner Periodizitäten verringert, jedoch nicht vollständig gelöst werden. In Schuh et al. (2001) wird eine nichtlineare Ausgleichung zur Auswertung von Polkoordinaten verwendet, wobei nur diejenigen Frequenzen als Unbekannte angesetzt werden, für die gute Näherungswerte vorhanden sind (Chandler-Welle, Jahresperiode). In Jung (1961) findet man: »Schwerefelder, die sich in Fourier-Reihen entwickeln lassen, sind periodisch und entsprechen daher nur sehr bedingt der Wirklichkeit. An ihnen lassen sich aber die grundlegenden Beziehungen besonders einfach erkennen.«

Eine Möglichkeit zur Modellierung eindimensionaler Daten mit Frequenzreihen, bestehend aus Frequenzen, die nicht in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen, wurde in Mautz (2001) und Mautz (2002) erörtert. Eine Verallgemeinerung speziell für die Modellierung, aber auch für die Bestimmung von Periodizitäten zweidimensionaler Daten, wird innerhalb dieses Artikels vorgestellt. Dazu wird eine Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen für die Modellierung zweidimensionaler Daten eingeführt. Die Bestimmung der Frequenzen erfolgt

hierbei unter Verwendung eines heuristischen Verfahrens. Dabei können die Frequenzen beliebige reelle Werte annehmen und müssen nicht wie bei einer Fourierreihe in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen.

## 2 Zweidimensionale Fourierreihe

Eine häufig verwendete Funktion zur Auswertung zweidimensionaler Daten ist die zweidimensionale Fourierreihe (Schröder 1964, Courant und Hilbert 1953, Jung 1961, Bath 1974). Durch Multiplikation zweier eindimensionaler Fourierreihen (Priestley 1981, Courant und Hilbert 1953, Bath 1974) erhält man die Formel für diese Funktion:

$$f(x, y) = \sum_{\mu=0}^{K_{\mu}} \sum_{\vartheta=0}^{K_{\vartheta}} A_{\mu\vartheta} \cdot \cos(\mu x) \cdot \cos(\vartheta y) \\ + B_{\mu\vartheta} \cdot \sin(\mu x) \cdot \cos(\vartheta y) \\ + C_{\mu\vartheta} \cdot \cos(\mu x) \cdot \sin(\vartheta y) \\ + D_{\mu\vartheta} \cdot \sin(\mu x) \cdot \sin(\vartheta y)$$

mit

$$\begin{array}{ll} \mu, \vartheta & \dots \text{Frequenzen,} \\ A_{\mu\vartheta}, B_{\mu\vartheta}, C_{\mu\vartheta}, D_{\mu\vartheta} & \dots \text{»Amplituden«,} \\ x, y & \dots \text{auf das Intervall } [0, 2\pi] \text{ transformierte Lagekoordinaten.} \end{array}$$

Die Frequenzen  $\mu$  und  $\vartheta$  stehen hierbei in ganzzahligen Verhältnissen zueinander, da sie nur diskrete Werte aus den Intervallen  $[0, 1, 2, \dots, K_{\mu}]$  bzw.  $[0, 1, 2, \dots, K_{\vartheta}]$  annehmen können.  $K_{\mu}$  und  $K_{\vartheta}$  stellen die höchste mögliche Frequenz für  $\mu$  bzw.  $\vartheta$  dar, welche aufgrund der Datenanzahl in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung ermittelt werden kann. Dabei muss berücksichtigt werden, dass eine Schwingung nur dann eindeutig identifiziert werden kann, wenn mindestens drei Datenpunkte innerhalb einer Schwingung liegen (Nyquistfrequenz (siehe Priestley 1981)).

Unter der Frequenz  $\mu = 1$  versteht man, dass genau eine Schwingung innerhalb der Datensatzlänge in  $x$ -Richtung erfolgt. Analog ist die Betrachtung für alle weiteren  $\mu$  und  $\vartheta$ . Damit diese Betrachtung gerechtfertigt ist, müssen die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten der Daten auf das Intervall  $[0, 2\pi]$  transformiert werden, d. h. obige Formel gilt nur für derart transformierte Daten.

Die Berechnung der »Amplituden«  $A_{\mu\vartheta}$ ,  $B_{\mu\vartheta}$ ,  $C_{\mu\vartheta}$  und  $D_{\mu\vartheta}$  kann anhand einer linearen Ausgleichung erfolgen, da die Frequenzen durch eine geeignete Wahl von  $K_{\mu}$  und  $K_{\vartheta}$  festgelegt sind. In Fällen, in denen die Daten gleichmäßig im Gebiet  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  verteilt sind, ist die Bestimmung der »Amplituden« zusätzlich durch die Anwendung von Integralformeln möglich (siehe z. B. Schröder 1964).

Führt die Vorgabe von Frequenzen mit ganzzahligen Verhältnissen nicht zu akzeptablen Ergebnissen, kann die im folgenden Abschnitt vorgestellte Methodik zur Frequenzbestimmung angewendet werden.

### 3 Einführung einer Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen zur Datenmodellierung

In Mautz (2001) und Mautz (2002) wurde zur Auswertung ausgewählter Daten (z. B. Altimeterdaten) eine modifizierte eindimensionale Fourierreihe verwendet. Dabei wurden die Frequenzen nicht vorgegeben, sondern als Unbekannte betrachtet, die anhand eines heuristischen Verfahrens mit Erfolg bestimmt werden konnten.

In Kaschenz (2002) wurde in Analogie dazu eine modifizierte zweidimensionale Fourierreihe zur Datenauswertung eingeführt, wobei die Frequenzen hier ebenso mittels der Heuristik bestimmt wurden. Die Formel für diese modifizierte zweidimensionale Fourierreihe ist grundsätzlich äquivalent mit der im Abschnitt 2 angeführten Formel, wobei die Frequenzen  $\mu$  und  $\vartheta$  durch beliebige Frequenzen  $f_\mu$  und  $f_\vartheta$  ersetzt wurden. Zusätzlich dazu wurden weitere unterschiedliche Frequenzreihen zur Datenauswertung betrachtet und hinsichtlich ihrer Verwendbarkeit untersucht. Dabei handelte es sich zum einen um eine Frequenzreihe, bei der die einzelnen eindimensionalen Schwingungen in Richtung der x- und y-Achse eines Koordinatensystems verlaufen, aber für jedes Frequenzpaar ein eigenes Koordinatensystem eingeführt wird, und zum anderen um eine Reihe rotationssymmetrischer Funktionen, die gedämpft<sup>1</sup> und ungedämpft betrachtet wurden. Die einzelnen rotationssymmetrischen Funktionen »breiten« sich jeweils von unterschiedlichen Quellpunkten in alle Richtungen mit unterschiedlichen beliebigen Frequenzen und unterschiedlich starken Dämpfungen aus, so dass zu erwarten ist, dass bei Verwendung dieser Funktion eine flexible Anpassung an unterschiedlichste Daten erfolgen kann. Die Auswertung von Messdaten zeigte, dass die heuristische Bestimmung der Frequenzen möglich ist und gegenüber »willkürlich« vorgegebener Frequenzen Vorteile hat.

Im Weiteren wird die Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen vorgestellt. Formal lässt sich diese Reihe wie folgt darstellen (eine grafische Veranschaulichung bietet Abb. 1):

1 In Bath (1974) findet man z. B. eine gedämpfte eindimensionale Fourierreihe.

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^K \frac{a_j}{d + e \cdot \left( \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \right)^{c_j}} \cdot \cos(f_j \cdot \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2}) + \frac{b_j}{d + e \cdot \left( \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2} \right)^{c_j}} \cdot \sin(f_j \cdot \sqrt{(x - x_{0j})^2 + (y - y_{0j})^2})$$

mit

- $f_j$  ... reellwertige Frequenzen,
- $x, y$  ... Lagekoordinaten,
- $x_{0j}, y_{0j}$  ... Koordinaten der »Quellpunkte«,
- $c_j$  ... Dämpfungsfaktoren,
- $a_j, b_j$  ... »Amplituden«,
- $d, e$  ... beliebige reelle Zahlen,
- $K$  ... Anzahl sich überlagernder Funktionen.

Bei der Verwendung dieser Reihe für Datenauswertungen wurden die Lagekoordinaten  $x$  und  $y$  auf das Intervall  $[0, 2\pi]$  transformiert. Diese Transformation ist nicht zwingend notwendig, da die Frequenzen dieser Reihe beliebige Werte annehmen können, so dass die Formel für transformierte und nicht transformierte Lagekoordinaten die gleiche Form hat. Aufgrund dieser Tatsache ist eine Angabe von Einheiten für die in obiger Formel verwendeten Parameter nicht notwendig. Der Parameter  $d$  wurde zur Vermeidung möglicher Singularitäten in den Quellpunkten eingeführt. Bei der bisherigen Verwendung dieser Formel für eine Datenmodellierung wurden die Parameter  $d$  und  $e$  als konstant betrachtet und beliebig festgelegt ( $d = e = 1.0$ ). Bei weiteren Untersuchungen können diese Parameter aber ebenso als Unbekannte betrachtet werden. Wären die Parameter Frequenz, Quellpunktkoordinaten und Dämpfungsfaktor bekannt, könnten die »Amplituden«  $a_j$  und  $b_j$  mittels einer linearen Gleichung berechnet werden. Da diese Parameter bei der Auswertung realer Daten in der Regel nicht bekannt sind, müssen sie ebenso als Unbekannte betrachtet werden. Somit erhält man ein nichtlineares Ausgleichsproblem für  $f_j, c_j, x_{0j}$  und  $y_{0j}$ . Um dieses lösen zu können, müssen Näherungswerte für sämtliche Unbekann-

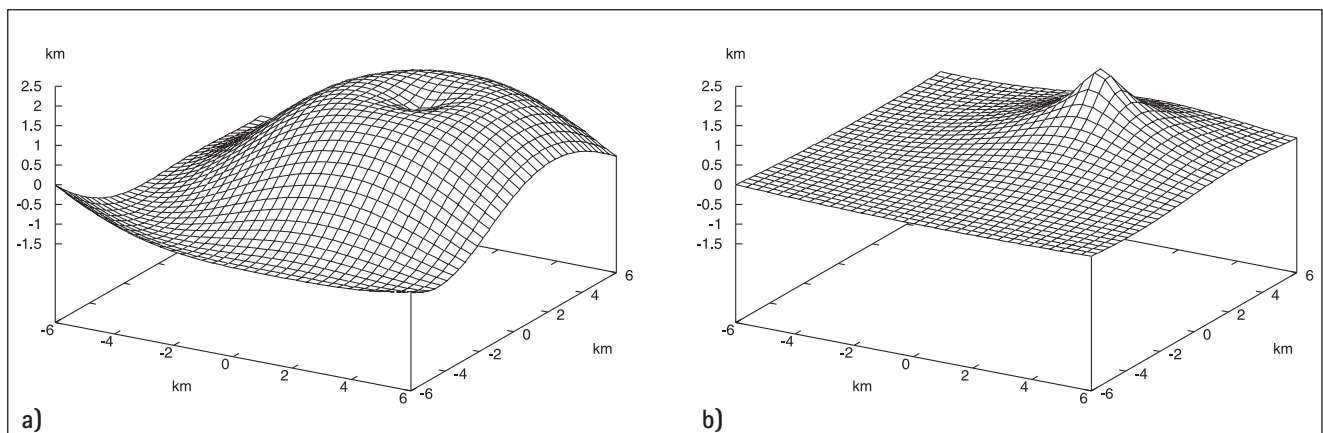


Abb. 1: Rotationssymmetrische Funktion mit unterschiedlicher Dämpfung für  $d = 2.0$  und  $e = 3.0$ : a)  $c = 0.01$  b)  $c = 1.3$

ten vorhanden sein. Im Falle einer Frequenzbestimmung ist eine genaue Kenntnis der Näherungswerte wesentlich entscheidender<sup>2</sup>, um zu einer plausiblen Lösung zu gelangen als bei vielen anderen Fragestellungen<sup>3</sup>. Da gute Näherungswerte bei der Auswertung realer Daten meist unbekannt sind, muss vorerst eine Bestimmung geeigneter Näherungswerte erfolgen. Diese Näherungswertbestimmung erfolgt unter Verwendung eines heuristischen Verfahrens. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Es werden mehrere Sätze von möglichen Näherungswerten systematisch-zufällig vorgegeben. Die Näherungswertvorgabe kann als systematisch-zufällig betrachtet werden, da nicht Zufallszahlen aus unendlich großen Intervallen als Näherungswerte für die einzelnen Unbekannten vorgegeben werden, sondern Zufallszahlen innerhalb endlicher Intervalle. Diese »Suchintervalle« müssen vorab für alle Unbekannten vorgegeben werden. Die Vorgabe von Intervallen für die Unbekannten ist wesentlich weniger kritisch als eine Vorgabe von Näherungswerten, da im Zweifelsfall die Intervalle sehr großzügig gewählt werden können. Für all diese potentiellen Näherungswerte wird der Wert der Zielfunktion (Summe der gegebenenfalls gewichteten Residuenquadrate) berechnet. Da das globale Minimum der Zielfunktion gesucht ist, stellt der Satz von Näherungswerten, der den kleinsten Wert für die Zielfunktion liefert, den besten gefundenen Satz von Näherungswerten dar. Unter Verwendung der ermittelten Näherungswerte für die Unbekannten wird anschließend eine nichtlineare Ausgleichung in mehreren Iterationen durchgeführt, so dass die Unbekannten in mehreren Schritten verbessert werden.

Um die Zuverlässigkeit der somit berechneten Unbekannten zu überprüfen, wird die Näherungswertsuche mehrmals unabhängig voneinander wiederholt, indem der Zufallsgenerator für die Näherungswertvorgabe für jeden Programmdurchlauf neu initialisiert wird. Ergeben sich nach der iterativen Berechnung der Unbekannten über die nichtlineare Ausgleichung mehrmals die gleichen Ergebnisse, können die berechneten Unbekannten als zuverlässig betrachtet werden. Dies ist zwar die einzige Möglichkeit, um die Zuverlässigkeit der Ergebnisse zu überprüfen, doch kann damit ausgeschlossen werden, dass die Minimierung der Zielfunktion zu einem Nebenminimum führte. Überprüfungen der Ergebnisse einer

auf übliche Weise durchgeführten nichtlinearen Ausgleichung (z. B. lokale Optimierung nach Gauß-Newton) sind dagegen nicht möglich (siehe Xu 2002).

#### 4 Vergleich der vorgestellten Frequenzreihen an einem Beispiel

Die im zweiten und dritten Abschnitt vorgestellten Frequenzreihen werden nun zur Modellierung realer Daten verwendet und die dabei erhaltenen Ergebnisse verglichen. Bei den ausgewerteten Daten handelt es sich um einen Satz von Schwereanomalien (in Form von Rasterdaten mit 37 bzw. 33 Datenpunkten in x- bzw. y-Richtung), die in der Abbildung 2 dargestellt sind.

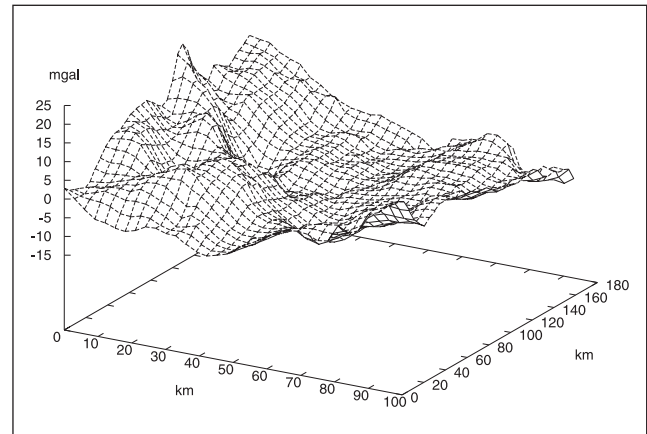


Abb. 2: Ursprüngliche Schwereanomalien – Datenintervall [−11.9 mgal; 23.2 mgal]

In Abbildung 3 sind die Ergebnisse dargestellt, die unter Verwendung der beiden unterschiedlichen Frequenzreihen für die Datenmodellierung erhalten wurden. Für die

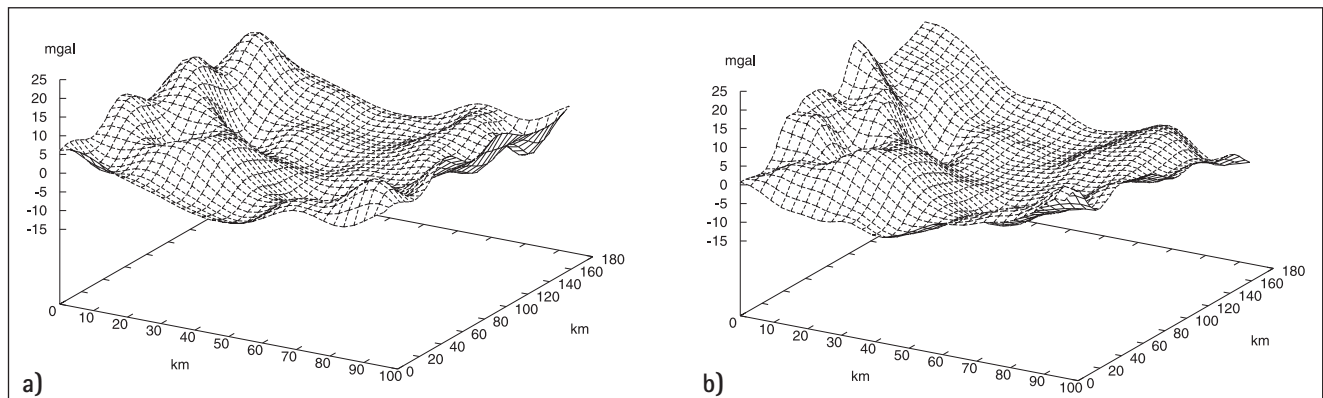


Abb. 3: Datenmodellierung mittels verschiedener Frequenzreihen  
a) zweidimensionale Fourierreihe (Abschnitt 2), b) Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen (Abschnitt 3)



zweidimensionale Fourierreihe wurde  $K_\mu = K_\vartheta = 5$  angesetzt und die dazugehörigen »Amplituden« durch eine lineare Ausgleichung berechnet. Bei der Reihe rotations-symmetrischer gedämpfter Funktionen wurde  $K = 25$  gewählt, so dass bei beiden Reihen gleich viele zweidimensionale Schwingungen überlagert wurden. Die Bestimmung der Unbekannten  $(f_j, c_j, x_{0j}, y_{0j}, a_j, b_j)$  erfolgte unter Verwendung des im Abschnitt 3 beschriebenen heuristischen Verfahrens.

Man sieht deutlich, dass unter Verwendung der zweidimensionalen Fourierreihe die Datenmodellierung vor allem in den Randbereichen wesentlich schlechter möglich ist als unter Verwendung der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen. Diese Tatsache lässt sich ebenso aus den berechneten mittleren quadratischen und maximalen Residuen erkennen. Unter Verwendung der zweidimensionalen Fourierreihe liegt das berechnete mittlere quadratische Residuum bei 2.241 mgal und das maximale Residuum bei 14.202 mgal. Für die Reihe rotationssymmetrischer Funktionen mit Dämpfung beträgt das mittlere quadratische Residuum 0.861 mgal und das maximale Residuum 3.586 mgal. Aufgrund des aufwändigen Auswerteverfahrens bei Verwendung der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen war für die Parameterberechnung der dargestellten Ergebnisse eine Rechenzeit von ca. 76 Stunden notwendig, wohingegen die Datenauswertung mit der zweidimensionalen Fourierreihe ca. 2 Sekunden Rechenzeit<sup>4</sup> benötigte. Daher wurde die Datenauswertung unter Verwendung der zweidimensionalen Fourierreihe zusätzlich mit maximal möglichen  $K_\mu$  und  $K_\vartheta$  ( $K_\mu = K_\vartheta = 16$ ; dies entspricht 289 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen<sup>5</sup>) durchgeführt, mit dem Ziel, die Genauigkeit der Datenmodellierung zu erhöhen. Bei der Festlegung der maximalen Werte für  $K_\mu$  und  $K_\vartheta$  wurde die Datenanzahl in x- bzw. y-Richtung sowie die Gesamtdatenanzahl berücksichtigt und nur der Fall betrachtet, dass  $K_\mu$  und  $K_\vartheta$  gleich groß sind. Die benötigte Rechenzeit erhöhte sich dadurch lediglich auf ca. 20 Minuten. Das erhaltene Ergebnis ist in Abbildung 4 dargestellt. Man erkennt, dass die Modellierung der Daten unter Verwendung von mehr überlagerten Schwingungen in den Stützpunkten verbessert werden konnte. Die Modellierung der Randbereiche bleibt aber weiterhin schlechter als unter Verwendung der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen mit nur 25 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen. Ebenso liegen auch das mittlere quadratische ( $V_{\text{mittel}} = 1.265$  mgal) und das maximale Residuum ( $V_{\text{max}} = 10.641$  mgal) noch immer wesentlich über den erhaltenen Werten für die Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen mit 25 überlagerten Schwingungen. Betrachtet man zudem das Verhalten der Modellfunktion mit 289 überlagerten zwei-

dimensionalen Schwingungen zwischen den Stützpunkten, so erhält man Abbildung 5. Aufgrund der großen Anzahl überlagerter Schwingungen kommt es zu starken Schwankungen im Funktionsverlauf zwischen den Stützpunkten, so dass der eigentliche Verlauf der Daten nicht mehr erkennbar ist (die unterschiedliche Skalierung der z-Achse von Abbildung 5 im Gegensatz zu den Abbildungen 2 bis 4 ist zu beachten). Derartige Schwankungen im Funktionsverlauf lassen sich erklären, wenn man die benötigte »Energie« bei Verwendung der unterschiedlichen Frequenzreihen betrachtet. So beträgt die Summe der Amplitudenbeträge bei der Verwendung der zweidimensionalen Fourierreihe mit 289 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen  $7.22 \cdot 10^{+14}$  mgal und bei der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen mit 25 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen  $3.80 \cdot 10^{+2}$  mgal. Das tatsächliche Verhalten der Schwereanomaliedaten ist zwischen den Stützpunkten zwar nicht bekannt, aber es ist sicher nicht anzunehmen, dass derart große Schwankungen der Schwereanomalien überhaupt auftreten können. Somit lässt sich sagen, dass zwar unter Verwendung von sehr vielen überlagerten Schwingungen für die zweidimensionale Fourierreihe die Datenmodellierung in den Stützpunkten verbessert werden konnte, aber gleichzeitig die Modellierung zwischen den Stützpunkten sehr unglaubwürdig wird.

Bestimmt man die »Amplituden« der zweidimensionalen Fourierreihe bei Verwendung von 289 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen durch Integration statt durch Ausgleichung, ergibt sich eine andere Darstellung. Das Verhalten der auf diese Weise bestimmten Modellfunktion mit 289 überlagerten Schwingungen zwischen den Stützpunkten zeigt keine Schwankungen, wie sie in Abbildung 5 zu sehen sind. Trotzdem kann das somit erhaltene Ergebnis nicht als zufriedenstellend betrachtet werden, da hierbei die Modellierung in den Stützpunkten noch wesentlich schlechter möglich ist als bei der Auswertung durch Ausgleichung.

Analog dazu bleibt das Verhalten der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen unter Verwendung von 25 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen zwischen den Stützpunkten zu betrachten (Abb. 6). Unter Verwendung dieser Reihe kommt es zwischen den Stützpunkten nicht zu Oszillationen, so dass der erhaltene Funktionsverlauf plausibel erscheint.

Mit dem betrachteten Beispiel sollte speziell gezeigt werden, dass unter Verwendung der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen durch die gezielte Wahl der Frequenzen die Anzahl sich überlagernder Schwingungen klein gehalten werden kann, ohne dabei an Genauigkeit zu verlieren. Die Interpretation der erhaltenen Frequenzen für die Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen ist grundsätzlich möglich, soll aber an dieser Stelle nicht erfolgen.

## 5 Schlussbetrachtungen und Ausblick

Für das betrachtete Beispiel lässt sich abschließend sagen, dass die Datenmodellierung unter Verwendung der Reihe

4 Die angegebenen Rechenzeiten dienen ausschließlich dazu, Rechenzeitverhältnisse zu veranschaulichen und sind daher nicht als absolute Größen aufzufassen.

5 Das sind ca. elf mal mehr überlagerte Schwingungen als bei der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen verwendet wurden.

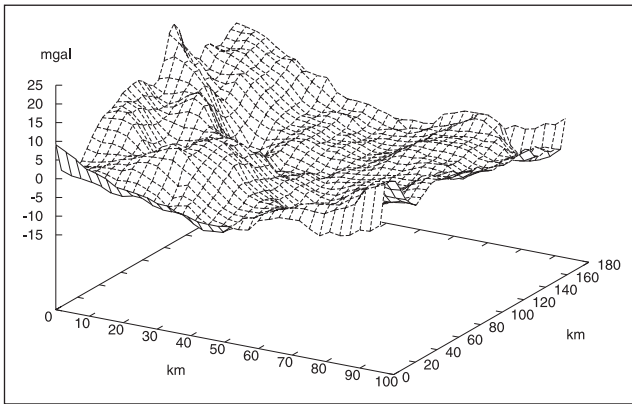


Abb. 4: Zweidimensionale Fourierreihe unter Verwendung von 289 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen – Darstellung in den zur Berechnung verwendeten Stützpunkten

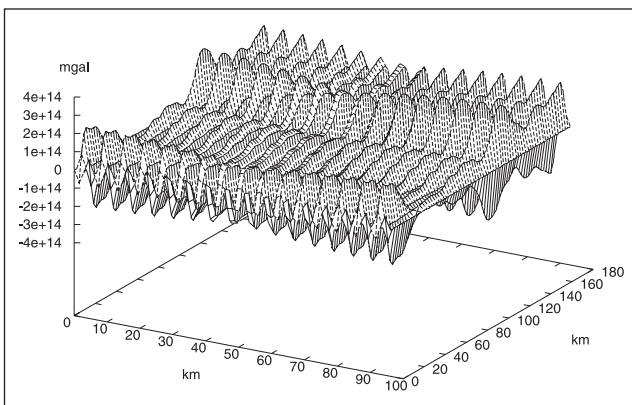


Abb. 5: Zweidimensionale Fourierreihe unter Verwendung von 289 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen – Darstellung in den Stützpunkten und in berechneten Zwischenpunkten

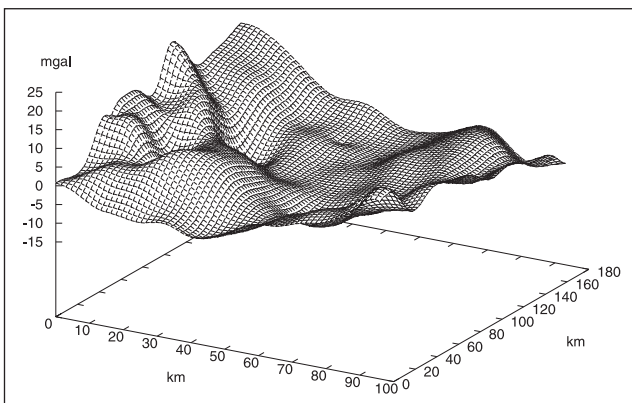


Abb. 6: Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen unter Verwendung von 25 überlagerten zweidimensionalen Schwingungen – Darstellung in den Stützpunkten und in berechneten Zwischenpunkten

rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen wesentlich besser möglich ist als unter Verwendung der zweidimensionalen Fourierreihe. Zum einen können dabei mit nur wenigen überlagerten zweidimensionalen Schwingungen (25) Genauigkeiten erreicht werden, die selbst bei

Verwendung der maximal möglichen Anzahl (289) überlagelter zweidimensionaler Schwingungen für die zweidimensionale Fourierreihe nicht erzielt werden können. Zum anderen scheint der Funktionsverlauf für diese Frequenzreihe zwischen den Stützpunkten sinnvoller als bei Verwendung der zweidimensionalen Fourierreihe.

Der notwendige Rechenaufwand bei der Verwendung der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen ist zwar im Augenblick sehr hoch, doch sollte an dieser Stelle lediglich geklärt werden, inwieweit eine derartige Auswertung von Daten sinnvoll möglich ist. Aufgrund der positiven Ergebnisse bei Verwendung der Reihe rotationssymmetrischer gedämpfter Funktionen zur Datenauswertung ist es nun erforderlich, Rechenzeitoptimierungen vorzunehmen. Ein Optimierungsschritt wurde bereits vorgenommen. So wurden die Suchintervalle für die Unbekannten während der Bestimmung potentieller Näherungswerte kontinuierlich verkleinert, so dass neue potentielle Näherungswerte in der Nähe vorangegangener guter Näherungswerte liegen.

#### Dank

Die innerhalb dieses Artikels vorgestellten Untersuchungen sind auf Grundlage meiner Diplomarbeit und im Rahmen meiner Tätigkeit an der Technischen Universität Berlin am Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik bei Prof. Dr.-Ing. D. Lelgemann entstanden.

#### Literatur

- Bath, M.: Spectral Analysis in Geophysics. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1974.
- Bronstein, J.N., Semendjajew, K.A.: Taschenbuch der Mathematik. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1985.
- Courant, R., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers Inc., New York, 1953.
- Heine, E.: Handbuch der Kugelfunktionen. Physica-Verlag, Würzburg, 1961.
- Jochmann, H.: Die modifizierte Fourier-Analyse einer zweidimensionalen Bewegung. ZfV 1/1993, S. 6–10, 1993.
- Jung, K.: Geophysik Vorlesungen an der THB. Berlin, 1937.
- Jung, K.: Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G., Leipzig, 1961.
- Kaschcz, J.: Mehrdimensionale Spektralanalyse mittels problemorientierter Frequenzen. Diplomarbeit an der Technischen Universität Berlin, 2002.
- Mautz, R.: Zur Lösung nichtlinearer Ausgleichungsprobleme bei der Bestimmung von Frequenzen in Zeitreihen. Dissertation, Nr. 532, DGK-Reihe C, München, 2001.
- Mautz, R.: Solving nonlinear Adjustment Problems by global Optimization. Anno LXI-Bollettino di Geodesia e Scienze Affini-N. 2, S. 123–134, 2002.
- Priestley, M.B.: Spectral Analysis And Time Series. Academic Press Inc., London, 1981.
- Schuh, H., Nagel, S., Seitz, T.: Linear drift and periodic variations observed in long time series of polar motion. Journal of Geodesy 74, S. 701–710, 2001.
- Schröder, K.: Mathematik für die Praxis – Ein Handbuch. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M., 1964.
- Tricomi, F.G.: Vorlesungen über Orthogonalreihen. Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1955.
- Xu, P.: A hybrid global optimization method: the one-dimensional case. Journal of Computational and Applied Mathematics 147, S. 301–314, 2002.

#### Anschrift der Autorin

Dipl.-Ing. Julia Kaschcz  
GeoForschungsZentrum Potsdam, Projektbereich 1.1  
Telegrafenberg C 3, 14473 Potsdam