

# Bezugssystemumstellung DHDN90 ↔ ETRS89 in Schleswig-Holstein

Joachim Boljen

## Zusammenfassung

Für die Überführung der Bezugssysteme DHDN90 ↔ ETRS89 wird ein universeller Ansatz vorgestellt, der auch dann eine geschlossene Lösung garantiert, wenn die Arbeiten vollautomatisch, an verschiedenen Stellen, zu unterschiedlichen Zeitpunkten, in einzelnen Abschnitten und vor dem Hintergrund einer nur mäßigen Netzqualität vorgenommen werden. Dazu wird auf der Grundlage des vorhandenen TP-Feldes und einer 3D-Transformation ein beliebiges viereckiges Gitter homologer Punkte berechnet, das die gesamte Landesfläche abdeckt. Darauf aufbauend wird mit Hilfe des Formfunktionsansatzes der Finite-Element-Methode die eigentliche 2D-Transformation der Detailpunkte vorgenommen. Zur Sicherstellung der vertikalen Integrität sollte dieser Ansatz, unabhängig von den jeweiligen fachspezifischen Anforderungen, für den gesamten Bereich des AFIS®-ALKIS®-ATKIS® verwendet werden.

## Summary

*For the transformation of the reference system DHDN90 ↔ ETRS89 an universal algorithm is represented which guarantees a consistent solution, even if the computation is done quite automatically, from various agencies, at different times, in several sections, and on the foundation of an only moderate precision of points. On the basis of the available TP-network and a 3D-transformation a quadrangular grid of corresponding points is calculated covering the entire area of the country. Based on this results the 2D-transformation of the detail points can be done by the form-functions-procedure of the finite-element-method. In order to ensure the vertical integrity, the algorithm should be used in any case of AFIS®-ALKIS®-ATKIS® application, irrespective of the occurrent special field requirements.*

## 1 Allgemeines

Das Bezugssystem des Deutschen Hauptdreiecksnetzes 1990 (DHDN90) soll spätestens bis 2005 auf das European Terrestrial Reference System 1989 (ETRS89) umgestellt werden. Die 2D-Koordinaten der auf das Bessel-Ellipsoid bezogenen 3° breiten Meridianstreifen des DHDN90 werden dabei in die entsprechenden Werte der 6° breiten Systeme des zum ETRS89 gehörenden Geodätischen Referenzsystems 1980 (GRS80) transformiert. An die Stelle der Gauß-Krüger-Abbildung tritt die Universale Transversale Mercatorprojektion (UTM), bezüglich des Datums erfolgt ein Übergang vom Potsdam-Datum (Zentralpunkt Rauenberg) auf die aus dem International Terrestrial Reference System (ITRS89) abgeleitete Lagerung des ETRS89.

Die eigentliche Umrechnung der Koordinaten könnte mit Hilfe identischer Punkte oder daraus abgeleiteter Transformationsparameter durchgeführt werden. Solche Parametersätze haben jedoch wegen der im DHDN90 vorhandenen Netzspannungen (in Schleswig-Holstein global bis zu 80 cm) eine allenfalls regionale Gültigkeit. Das Heranziehen identischer Punkte, wie z. B. ausgewählter TP, hat darüber hinaus den Nachteil, dass diese Auswahl nicht eindeutig ist. Verschiedene Stellen würden vielmehr zu unterschiedlichen Zeitpunkten eine voneinander abweichende Punktauswahl treffen und so inkonsistente Lösungen erzeugen. Um diese Problematik zu vermeiden, bietet sich eine zweistufige Vorgehensweise an. Danach wird in einem ersten Schritt vom Landesvermessungsamt mit Hilfe der identischen TP und einer 3D-Transformation ein regelmäßiges Gitter homologer Ersatzpunkte für die gesamte Landesfläche berechnet, in einem zweiten Schritt können dann alle betroffenen Stellen auf der Grundlage dieses Gitters die zweidimensionale Umformung der eigentlichen Detailpunkte vornehmen. Durch die Regelmäßigkeit des Gitters wird über die Auswahl der identischen Punkte abschließend verfügt, unterschiedliche Bestimmungsfiguren sind damit von vornherein ausgeschlossen.

Die nachfolgende 2D-Transformation der Einzelpunkte sollte für alle Anwendungen auf der gleichen mathematischen Grundlage erfolgen. Als sehr vorteilhaft hat sich dabei der Ansatz nach Formfunktionen erwiesen. Bei diesem Modell wird davon ausgegangen, dass ein beliebiges viereckiges Gitter über das insgesamt zu transformierende Gebiet gelegt wird, für dessen Eckwerte die Koordinaten durch die vorstehend beschriebene 3D-Transformation sowohl in dem Start- als auch Zielsystem bestimmt worden sind. Hierauf aufbauend kann dann das jeweilige Teilgebiet unabhängig von seinen Nachbargebieten transformiert werden, die Ränder der einzelnen Maschen fallen auch nach der Transformation wieder klaffungsfrei zusammen. Eine konsistente Rücktransformation ist möglich. Der wesentliche Vorteil dieses Interpolationsansatzes liegt in der eindeutigen mathematischen Beziehung, die ihrerseits die Starrkörperbewegung und die Restklaffenverteilung der herkömmlichen Transformationsansätze zu einem einzelnen Rechenschritt zusammenfasst. Durch die Ausschaltung sämtlicher Entscheidungsspielräume ist der Ansatz vollständig automatisierbar.

Zur Zeit wird in Schleswig-Holstein ein flächendeckendes TP-Netz mit einer Dichte von durchschnittlich 1 TP/km<sup>2</sup> aufgebaut; die Koordinaten werden sowohl im DHDN90 als auch im ETRS89 geführt. Die hohe Punkt-

dichte ist erforderlich, um die umfangreichen Koordinatenbestände des Liegenschaftskatasters so umzustellen, dass sie den qualitativen Anforderungen moderner Messverfahren, insbesondere denen des Satellitenpositionierungsdienstes (SAPOS®) der deutschen Landesvermessung, genügen. Auf der Grundlage der etwa 16.000 TP werden die Koordinaten des genannten Gitters berechnet. Um den vollen Informationsgehalt bei der Transformation auszunutzen, sollte sich der Abstand des Gitters an dem Abstand der verwendeten TP von durchschnittlich 1 km orientieren. Landesvermessungsämter mit einem qualitativ besseren Grundlagennetz haben die Möglichkeit, diese Gitterweite entsprechend größer zu wählen.

Die Länder, die durch Netzerneuerungen im Bereich des DHDN90 unterschiedliche Koordinatensätze realisiert haben, können diese Werte wahlweise zur Transformation mitbenutzen. Die Anzahl der Ausprägungen ist dabei nicht begrenzt, Voraussetzung ist nur, dass man für genügend viele Punkte der jeweiligen Realisierung auch die Koordinaten im ETRS89 kennt.

Diese Situation ist auch für Schleswig-Holstein von großer Bedeutung, denn leider stimmt hier zur Zeit das im Bereich der Landesvermessung bzw. des Liegenschaftskatasters benutzte DHDN90 an mehreren Stellen nicht überein. Es muss daher generell zwischen dem DHDN90 (LST = 210, Landesvermessung) und dem DHDN90 (LST = 200, Liegenschaftskataster) unterschieden werden. Diese Differenzen können beim Übergang zum ETRS89 beseitigt werden, indem man für die Eckwerte des vorstehend beschriebenen Gitters die zugehörigen ETRS89-Koordinaten sowohl auf der Grundlage der TP im DHDN90 (LST = 210) als auch im DHDN90 (LST = 200) berechnet.

Um die Einheitlichkeit des ETRS89 nicht bereits im Ansatz wieder zu gefährden, müssen alle Transformationen mit dem gleichen mathematischen Ansatz und mit dem gleichen Gitter, einschließlich der zugehörigen Gitterwerte, ausgeführt werden. Demzufolge muss der Ansatz allen Vermessungsstellen und auch Dritten zur Verfügung gestellt werden, eine zentrale Koordinierung und Unterstützung ist anzustreben. Die Anwendung sollte im Interesse der Einheitlichkeit verbindlich vorgeschrieben werden.

Dieses gilt auch für die verschiedenen Spezialaufgaben, unabhängig von der Entstehung, Bedeutung und Genauigkeit der jeweiligen Koordinaten (Boljen 1995). Insbesondere zur Sicherstellung der vertikalen Integrität der digitalen Informationssysteme AFIS®-ALKIS®-ATKIS® ist es dringend erforderlich, von einem einheitlichen Transformationsansatz auszugehen, um abweichende

Geometriefestlegungen von vornherein auszuschließen. Unterschiedliche Genauigkeitsanforderungen an die Geobasis- und Geofachdaten dürfen nicht als Legitimation für unterschiedliche Berechnungsansätze herangezogen werden. Dadurch bedingte zusätzliche Inkonsistenzen in den digitalen Datenbeständen würden die Synergieeffekte schmälern und die Bedeutung des darauf aufbauenden Geodatenmanagements unnötig einschränken. Eine für alle Seiten akzeptable Lösung kann nur erreicht werden, wenn auch die umfangreichen Geofachdatenbestände mit einem einfachen Ansatz automatisch und kongruent zu den Geobasisdaten in das ETRS89 überführt werden.

Der hier vorgestellte Algorithmus ist universell einsetzbar und könnte daher von allen Landesvermessungsämtern benutzt werden. Unterschiede im DHDN90 und sonstige spezielle Gegebenheiten des jeweiligen Landes können ohne wesentliche Aufwendungen berücksichtigt werden. Auch bundesweit tätige Stellen könnten diesen Ansatz für die Erledigung eigener Arbeiten mit verwenden.

## 2 Datenhaltung

Die Koordinaten der Gitterpunkte werden für jeden Meridianstreifen des DHDN90 in einer besonderen Datei verwaltet. Dabei gelten als Kennung der jeweiligen Gittermasche die runden Kilometerwerte der linken unteren Ecke des Kilometerquadrats im DHDN90. Die Variablen  $y$  und  $x$  stehen für den Rechts- und Hochwert und die Indizes  $d$  und  $e$  für das DHDN90 und das ETRS89; der jeweilige Meridianstreifen wird durch den Index  $s$  wiedergegeben (vgl. Tab. 1).

Unter der Spalte DHDN90 werden die vollständigen Koordinaten der linken unteren Ecke der korrespondierenden Gittermasche geführt. Dabei wird der Bereich der Maschen bezüglich der Nummerierungsbezirke bis auf den ersten jenseits des Grenzmeridians liegenden runden Kilometerwert ausgedehnt. Als zugehörige DHDN90-Koordinaten für diesen Punkt werden jedoch nicht die runden Koordinatenwerte der linken unteren Ecke, sondern die des Schnittpunktes des Grenzmeridians mit der unteren Gitterlinie des Kilometerquadrats aufgeführt. Diese Regelung gilt sowohl für den westlichen als auch östlichen Grenzmeridian des jeweiligen Meridianstreifens.

Unter der Überschrift ETRS89(210) bzw. ETRS89(200) werden die mit Hilfe einer 3D-Transformation aus den so festgelegten DHDN90-Koordinaten abgeleiteten ETRS89-Koordinaten aufgeführt. Dabei sind die unter ETRS89(210) abgelegten Koordinaten durch die Verwendung der TP-

Tab. 1: Datei der Koordinaten der Gitterwerte für den Meridianstreifen  $s$  des DHDN90

Nummerierungsbezirk		DHDN90		ETRS89 (210)		ETRS89 (200)		ETRS89 (...)	
»INT [ $y_{d,i}^s/1000$ ]«	»INT [ $x_{d,i}^s/1000$ ]«	$y_{d,i}^s$	$x_{d,i}^s$	$y_{e,i}$	$x_{e,i}$	$y_{e,i}$	$x_{e,i}$	...	...
...									
...									...

Koordinaten mit dem LST = 210 entstanden; sie sind für die Transformationen aus dem Bereich der Landesvermessung zu verwenden. Entsprechendes gilt für die unter ETRS89(200) aufgeführten Koordinaten und den Bereich des Liegenschaftskatasters. Weitere oder andersartig festgelegte Koordinatensätze sind möglich. Bundesweit tätige Stellen könnten hier die verschiedenen Passpunktdateien der einzelnen Länder ablegen.

Bei der eigentlichen Transformation kann das Auffinden der jeweils zu verwendenden Gitterwerte beträchtliche Zeiten in Anspruch nehmen. Dies wird insbesondere dann der Fall sein, wenn die Daten entsprechend der vorstehenden Tabelle verwaltet werden. Jeder Suchvorgang würde dann bei etwa 16.000 Datensätzen durchschnittlich 8.000 Abfragen erforderlich machen.

Geht man zu doppelt indizierten Variablen über, indem man ein Feld vereinbart, dessen eine Achse durch die runden Kilometerwerte der Rechtswerte der linken unteren Ecke und dessen andere Achse durch die der entsprechenden Kennungen der Hochwerte festgelegt ist, dann verkürzt sich dieser Suchvorgang auf durchschnittlich 200 Abfragen (100 für das Auffinden des Rechtswertes und 100, um innerhalb dieses Rechtswertes den richtigen Hochwert zu finden). Die über dieses zweidimensionale Raster verwalteten eigentlichen Koordinatenwerte könnten in einem dritten Laufbereich abgelegt werden.

Durch eine fortgesetzte Schachtelung lässt sich der Suchvorgang weiter abkürzen. Dabei wird der aufsteigend sortierte Gesamtbereich jeweils in der Mitte unterteilt und es wird danach gefragt, ob die gesuchte Größe im oberen oder unteren Abschnitt liegt. Der Vorgang wird schrittweise fortgesetzt, bis der verbleibende Bereich nicht mehr weiter unterteilt werden kann. Für den hier diskutierten Fall verkürzt sich der gesamte Vorgang damit auf 16 Abfragen (jeweils 8 für den Rechts- bzw. Hochwert).

Zur Transformation der Detailpunkte werden nicht nur die Koordinaten der linken unteren Ecke, sondern auch die der benachbarten Kilometerquadrate (oben, rechts-oben und rechts) benötigt. Bei der Verwaltung der Ausgangsdaten mit Hilfe doppelt indizierter Variablen kann ohne zusätzlichen Suchaufwand auf diese Eckwerte direkt zugegriffen werden (links-unten:  $i, j$ ; links-oben:  $i, j+1$ ; rechts-oben  $i+1, j+1$ ; rechts-unten  $i+1, j$ ).

### 3 Koordinatentransformation mit Hilfe von Formfunktionen

Der hier vorgeschlagene Formfunktionsansatz ist Bestandteil der Finite-Elemente-Methode, die insbesondere im Bereich der Kontinuumsmechanik zu einem unverzichtbaren Hilfsmittel bei der Beantwortung statischer Fragen geworden ist (Zienkiewicz 1977).

Der Algorithmus geht davon aus, dass das gesamte zu bearbeitende Gebiet in beliebig viele allgemeine Vierecke zerlegt wird, die ihrerseits klein genug sind, um die in-

teressierenden Eigenschaften (hier: Geometrische Umbildung) des Objekts durch einfache mathematische Beziehungen beschreiben zu können (Boljen 1996). Die Transformation der Einzelpunkte wird dann innerhalb des jeweiligen Vierecks auf der Grundlage der Koordinaten der zugehörigen Eckwerte durchgeführt. Die angewendete Rechenvorschrift wird aus der Bedingung der  $C_0$ -Kontinuität hergeleitet, d. h. es wird gefordert, dass die Ränder benachbarter Vierecke auch nach der Transformation wieder klaffungsfrei zusammengefügt werden können. Dieses hat bei dem insbesondere quantitativen Umfang der hier vorliegenden Aufgabe den entscheidenden Vorteil, dass die gesamte Arbeit

- als vollautomatischer Prozess,
- selbst bei mäßiger Netzqualität,
- in einzelnen Abschnitten,
- an verschiedenen Stellen,
- zu unterschiedlichen Zeitpunkten

und damit auch über einen längeren Zeitraum hinweg ausgeführt werden kann. Durch die so gewonnene Flexibilität ergeben sich deutliche organisatorische Vorteile. Die fachliche Forderung einer bestmöglichen lokalen Anpassung (pro Kilometerquadrat), ohne dass Differenzen an den Rändern der Transformationsfiguren entstehen, ist erfüllt. Eine geometrisch begründete Ableitung dieses Ansatzes, entsprechend der Ähnlichkeits- oder Affintransformation, existiert nicht.

Rein formal ergeben sich die Koordinaten eines Punktes  $P_i$  innerhalb eines so festgelegten Vierecks gemäß

$$\begin{aligned} y_i &= N_{1i} y_1 + N_{2i} y_2 + N_{3i} y_3 + N_{4i} y_4, \\ x_i &= N_{1i} x_1 + N_{2i} x_2 + N_{3i} x_3 + N_{4i} x_4, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

Die dabei verwendeten Formfunktionen  $N_{ji}$  kann man sich vereinfacht als Gewichtskoeffizienten vorstellen; sie werden wie folgt berechnet

$$N_{ji} = 0.25 (1 + \xi_j \xi_i) (1 + \eta_j \eta_i), \quad j = 1, \dots, 4, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Die Bedeutung der hilfsweise eingeführten  $\eta, \xi$ -Koordinaten ist der Abb. 1 zu entnehmen. Der generelle Zusammenhang des allgemeinen Vierecks mit seinen realen  $y, x$ -Koordinaten und dem Quadrat der Beziehung (2) mit seinen normierten  $\eta, \xi$ -Koordinaten ist durch die Gleichung (1) gegeben. Für die Eckpunkte selber ergibt sich die konkrete Zuordnung per Definition, für einen beliebigen Punkt  $P_i$  bzw. für dessen konkrete  $y_i, x_i$ -Koordinaten müssen die korrespondierenden Werte  $\eta_i, \xi_i$  berechnet werden.

Leider ist eine explizite Auflösung der Beziehung (1) nach den in den Formfunktionen  $N_{ji}$  enthaltenen normierten  $\eta_i, \xi_i$ -Koordinaten nicht ohne weiteres möglich. Erste Näherungswerte hierfür könnte man jedoch dadurch erhalten, dass man die Verhältnisse zwischen den konkreten und normierten Koordinaten in den Ecken in etwa proportional auf die konkreten  $y_i, x_i$ -Koordinaten

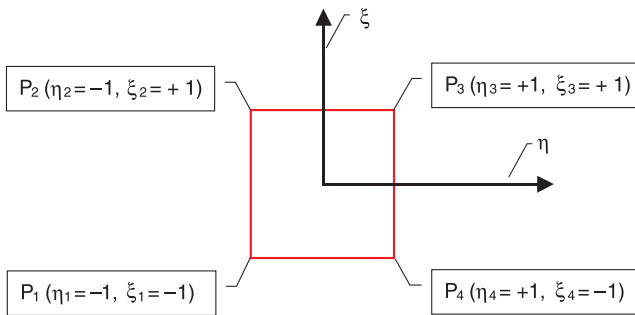


Abb. 1: Normierte  $\eta, \xi$ -Koordinaten

des umzurechnenden Punktes überträgt (schwerpunktsbezogen und maßstabskorrigiert). Mit diesen näherungsweise bestimmten  $\eta_i^k, \xi_i^k$ -Koordinaten können die Formfunktionen  $N_{ji}^k$  nach (2) und anschließend nach (1) die zu diesen Näherungswerten gehörenden  $y_i^k, x_i^k$ -Koordinaten berechnet werden. Aus den Abweichungen zu den vorgegebenen  $y_i, x_i$ -Koordinaten können dann gemäß

$$\begin{aligned} \eta_i^{k+1} &= \eta_i^k + m (y_i - y_i^k), \\ \xi_i^{k+1} &= \xi_i^k + m (x_i - x_i^k), \quad k = 1, \dots, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

verbesserte normierte  $\eta_i^{k+1}, \xi_i^{k+1}$ -Koordinaten berechnet werden. Der Maßstabsfaktor  $m$  steht dabei für das Größenverhältnis der Gittermasche zum normierten Bezugsquadrat gemäß Abb. 1 und beträgt in diesem Fall  $m = 2,0 \cdot 10^{-3}$ . Das vorstehend beschriebene Iterationsverfahren ist abzubrechen, wenn die Koordinatendifferenz  $\Delta y_i^k = y_i - y_i^k$  bzw.  $\Delta x_i^k = x_i - x_i^k$  einen vorgegeben Grenzwert  $ABS(\Delta y_i^k), ABS(\Delta x_i^k) \leq 5,0 \cdot 10^{-4}$  nicht überschreitet.

Da die grundlegende Abbildungsgleichung nach (1) einen linearen Prozess beschreibt, wird das durch (3) formulierte Iterationsverfahren sehr schnell konvergieren. Damit wird es sogar möglich, auf die angedeutete explizite Bestimmung der Startwerte  $\eta_i^1, \xi_i^1$  zu verzichten und diese grundsätzlich zu  $\eta_i^1 = 0, \xi_i^1 = 0$  anzunehmen.

Die eigentliche Transformation der  $y_{d,i}^s, x_{d,i}^s$ -Koordinaten des DHDN90 in die  $y_{e,i}^t, x_{e,i}^t$ -Koordinaten des ETRS89 zerfällt damit in zwei Einzelschritte: Als erstes werden mit Hilfe der  $y_{d,i}^s, x_{d,i}^s$ -Koordinaten die zugehörigen normierten  $\eta_i, \xi_i$ -Koordinaten nach (3) berechnet und anschließend werden auf dieser Grundlage die letztendlich gesuchten  $y_{e,i}^t, x_{e,i}^t$ -Koordinaten ermittelt. Rein formal geschieht dieses dadurch, dass man in (1) für die Eckwerte den jeweils korrespondierenden Koordinatensatz hinterlegt.

Es ist unbedingt darauf zu achten, dass nur die Punkte innerhalb einer Gittermasche (einschließlich ihrem Rand) auf der Grundlage der zugehörigen Eckwertskordinaten berechnet werden. Die außerhalb dieses Bereichs liegenden Punkte sind nur auf der Grundlage der speziell zu diesen Punkten gehörenden Gittermasche umzuformen. Dieses schließt nicht aus, dass für außerhalb der Gittermasche liegende Punkte hilfsweise transformierte Näherungswerte ermittelt werden können, deren Qualität jedoch mit der Entfernung zum Gitterrand schnell abnimmt (Extrapolation).

#### 4 Koordinatentransformation DHDN90 → ETRS89

Bei der Transformation vom DHDN90 in das ETRS89 wird aus jeder umzurechnenden Koordinate  $y_{d,i}^s, x_{d,i}^s$  des Meridianstreifens  $s$  der zugehörige Nummerierungsbezirk abgeleitet (B).

Bei der eigentlichen Transformation der Koordinaten mit Hilfe der Formfunktionen werden die DHDN90- und die ETRS89(210)- bzw. ETRS89(200)-Koordinaten der zugehörigen linken unteren Ecke und die der benachbarten Kilometerquadrate (oben, rechts-oben und rechts) benutzt (C).

Durch die iterative Anwendung der Gleichungen (1) bis (3) werden die  $y_{d,i}^s, x_{d,i}^s$ -Koordinaten auf der Grundlage der jeweiligen Eckwerte des DHDN90 in die normierten  $\eta_i, \xi_i$ -Koordinaten umgerechnet. Mit Hilfe der gemäß (2) festgelegten Formfunktionen  $N_{ji}$  und der korrespondierenden Eckwertskordinaten des ETRS89 können anschließend die gesuchten  $y_{e,i}^t, x_{e,i}^t$ -Koordinaten nach (1) bestimmt werden.

Anschließend wird der nächste zu transformierende Punkt aufgerufen (D); so lange die Gesamtaufgabe noch nicht abgearbeitet ist (A), beginnt der Vorgang mit der Festsetzung des zugehörigen Nummerierungsbezirks (B) neu.

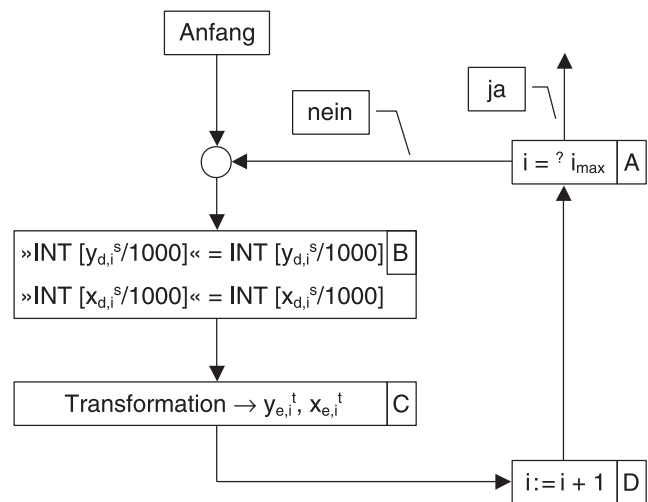


Abb. 2: Ablaufschema des Rechengangs

Die unterschiedliche Datumsfestlegung des DHDN90 bzw. ETRS89 hat zur Folge, dass die Meridiane der einzelnen Streifen nicht klaffungsfrei zusammenfallen, bzw. dass in der unmittelbaren Nähe der Grenzmeridiane des ETRS89 die transformierten Koordinaten dem betroffenen Meridianstreifen allein durch seine Ausgangswerte nicht abschließend zugeordnet werden können. Um dieses Problem zu beseitigen, werden die  $y_{e,i}^t, x_{e,i}^t$ -Koordinaten der fraglichen Punkte in ellipsoidische  $\varphi_{e,i}^t, \lambda_{e,i}^t$ -Koordinaten umgewandelt. Durch die dabei bestimmte Länge  $\lambda_{e,i}^t$  kann dann der für die UTM-Abbildung korrekte Meridianstreifen festgestellt werden.

## 5 Koordinatentransformation ETRS89 → DHDN90

Die Rücktransformation des ETRS89 in das DHDN90 ist nach dem gleichen Rechenansatz wie die Hintransformation durchzuführen, lediglich die verwendeten Ausgangswerte für das Start- und Zielsystem sind gegeneinander auszutauschen.

Um eine konsistente Lösung (bei der Rücktransformation werden die Ausgangskordinaten exakt wieder erreicht) zu gewährleisten, muss diese Rücktransformation jedoch innerhalb der gleichen Gittermasche wie bei der Hintransformation durchgeführt werden. Da das verwendete Gitter im Rahmen des DHDN90 festgelegt ist, für die zurückzutransformierenden Koordinaten aber vorerst nur die entsprechenden Werte im ETRS89 bekannt sind, müssen einige Such- und Prüfabschnitte zusätzlich durchlaufen werden.

Dazu legt man in einem ersten Schritt den vermuteten Meridianstreifen  $s$  und für die gesuchten  $y_{d,i}^s, x_{d,i}^s$ -Koordinaten grobe Näherungswerte fest. Stellt man bei der anschließenden Transformation fest, dass die berechneten  $y_{d,i}^{s,t}, x_{d,i}^{s,t}$ -Koordinaten nicht in die angenommene Gittermasche fallen, dann benutzt man das so erhaltene Ergebnis, um eine zumindest bessere Festlegung der zu verwendenden Gittermasche zu erreichen. Existiert diese Masche, einschließlich ihrer Nachbarmaschen (oben, rechts-oben und rechts), in dem angenommenen Meridianstreifen, dann kann auf dieser Grundlage eine neue Transformation berechnet werden. Dabei wird in der Regel bereits die einmal wiederholte Bestimmung bestätigen, dass nunmehr die richtige Gittermasche benutzt worden ist, anderenfalls wird eine weitere Iteration erforderlich.

Wird die Masche nicht gefunden, weil bereits der eingangs angenommene Meridianstreifen falsch ist, dann wird der nächste Streifen für die weiteren Berechnungen benutzt.

In der Nähe der im DHDN90 festgelegten Grenzmeridiane überschneiden sich die Nummerierungsbezirke der jeweiligen Kilometerquadrate, so dass die Rücktransformation von ETRS89-Koordinaten in einen bestimmten Meridianstreifen des DHDN90 nicht eindeutig möglich ist. Darüber hinaus kann sich diese Zuordnung wegen der unterschiedlichen Datumsfestlegung der Bezugssysteme verändern. Daher sollten die transformierten  $y_{d,i}^{s,t}, x_{d,i}^{s,t}$ -Koordinaten der Kilometerquadrate, die den Grenzmeridian des DHDN90 beinhalten, in die ellipsoidischen  $\varphi_{d,i}^t, \lambda_{d,i}^t$ -Koordinaten dieses Bezugssystems umgerechnet werden. Anhand der Länge  $\lambda_{d,i}^t$  können dann die umgeformten Koordinaten dem Meridianstreifen abschließend zugeordnet werden. Bei einer Änderung ist die Rücktransformation ins DHDN90 wegen der nicht eindeutigen Gitterzuweisung auf der Grundlage der aktuellen Streifenfestlegung zu wiederholen.

## 6 Genauigkeit

Die Genauigkeit der transformierten Koordinaten hängt sowohl von den Netzspannungen innerhalb des DHDN90 als auch von der Anzahl der Stützpunkte zwischen dem DHDN90 und dem ETRS89 ab.

Für eine erste globale Beurteilung der Qualität des DHDN90 können die Koordinaten des schleswig-holsteinischen C-Netzes (Punktabstand  $\sim 30$  km) mit Hilfe einer 3D-Transformation auf die korrespondierenden Werte des ETRS89 aufgefördert werden. Die 2D-Abbildungen der dabei festgestellten Restklaffen sind der Abb. 3 zu entnehmen.

Da das Ausgleichsergebnis des C-Netzes für die Standardabweichung der ETRS89-Koordinaten Werte von  $\sigma_{x,e} = 0,5$  cm ausweist, können die bis zu 80 cm großen Restklaffen vollständig dem DHDN90 zugeordnet und als zufällige Abweichungen  $\epsilon_{x,d}$  dieser Koordinaten aufgefasst werden. Die zugehörige Kovarianzfunktion

$$C_{x,d}(s_d) = \sigma_{x,d}^2 \exp(-\alpha_{x,d}^2 s_d^2) \quad (4)$$

ist durch eine Standardabweichung von  $\sigma_{x,d} = 17,6$  cm und durch eine Halbwertsbreite von  $s_{h,x,d} = 27,0$  km gekennzeichnet. Damit wird deutlich, dass die Realisierung des DHDN90 in Schleswig-Holstein eine nur mäßige Qualität aufweist. Da die Korrelation zwischen den benachbarten Netzpunkten mit  $\rho \sim 0,4$  signifikante Beträge annimmt, ist die relative Genauigkeit jedoch verhältnismäßig hoch. Dieses numerische Ergebnis wird durch die Abb. 3 bestätigt. Die Restklaffen des dargestellten Gitters sind durch eine Filterung der Einzelwerte des C-Netzes entstanden.

Berechnet man auf der Grundlage dieser Parameter aus den DHDN90-Koordinaten die Strecke  $s_d$  und den Richtungswinkel  $\varphi_d$  für eine beliebige Punktverbindung,

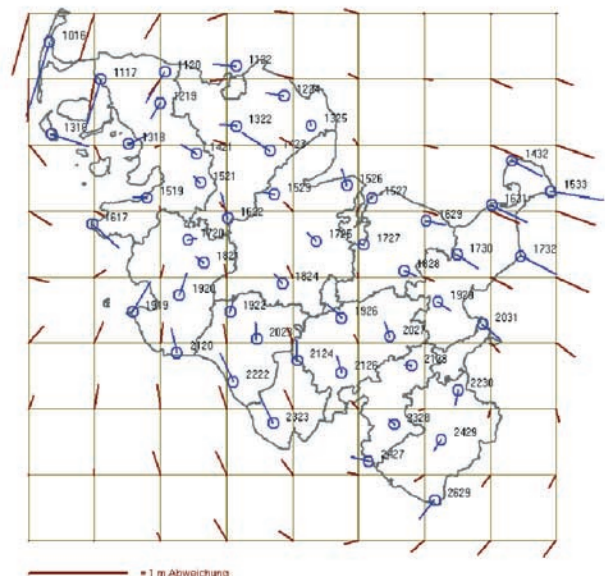


Abb. 3: Restklaffen der DHDN90-Koordinaten des C-Netzes

dann ergibt sich die Varianz dieser Benutzerfunktionen zu

$$\begin{aligned}\sigma_{s,d}^2 &= 2\sigma_{x,d}^2 [1 - \exp(-\alpha_{x,d}^2 s_d^2)], \\ \sigma_{\varphi,d}^2 &= 2\sigma_{x,d}^2 [1 - \exp(-\alpha_{x,d}^2 s_d^2)] / s_d^2.\end{aligned}\quad (5)$$

Zieht man die Elemente  $s_d$  und  $\varphi_d$  anschließend zur Bestimmung eines Polarpunktes im ETRS89 heran, dann erhält man für die Varianz dieser Koordinaten den Ausdruck

$$\sigma_{x,e}^2 = 2\sigma_{x,d}^2 [1 - \exp(-\alpha_{x,d}^2 s_d^2)]. \quad (6)$$

Dabei sind die Varianzen des Ausgangspunktes im ETRS89 und die der Maßstabs- und Orientierungsunbekannten wegen Geringfügigkeit vernachlässigt worden. Die Beziehung (6) kann, zumindest in der Nähe der Stützpunkte, als eine Abschätzung der ins ETRS89 transformierten Koordinaten verwendet werden. Die numerischen Ergebnisse sind in der Abb. 4 dargestellt.

Die vorstehenden Beziehungen (5) und (6) verdeutlichen den Effekt der Nachbarschaftsgenauigkeit geodätischer Netze sehr gut. In den Fällen, in denen die Halbwertsbreite

$$s_{h,x,d} = \alpha_{x,d}^{-1} (\ln 2)^{1/2} \quad (7)$$

sehr groß bzw. der Parameter  $\alpha_{x,d}$  entsprechend klein wird, strebt zumindest bei kurzen Punktentfernungen  $s_d$  das Argument der in (5) und (6) benutzten Exponentialfunktion und damit der gesamte eckige Klammerausdruck gegen Null.

Fragt man nach der Entfernung  $s_d$ , bis zu der die Standardabweichung der transformierten Koordinate  $\sigma_{x,e}$  kleiner als die der Ausgangswerte  $\sigma_{x,d}$  ausfällt, dann kann man aus (6) bzw.

$$1 - \exp(-\alpha_{x,d}^2 s_d^2) \leq 0,5 \quad (8)$$

die Schlussfolgerung ziehen, dass dieses bei Punktabständen bis zur Halbwertsbreite  $s_{h,x,d}$  der Fall ist. Bei einer starken Korrelation der Ausgangswerte geht eine Umstellung des Bezugssystems also einher mit einer zumindest moderaten Verbesserung seiner Qualität (Boljen 1997).

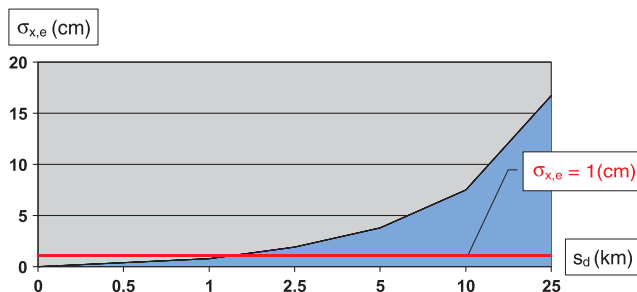


Abb. 4: Standardabweichung der transformierten Koordinaten in Abhängigkeit der Entfernung zum nächstgelegenen Stützpunkt

Diese Situation macht weiterhin deutlich, dass bei einer Transformation auf der Grundlage des vorhandenen C-Netzes und bei Entfernungen von  $s_d = 1$  km Standardabweichungen von  $\sigma_{x,e} \sim 1$  cm für die transformierten Koordinaten erwartet werden können. Darüber hinaus steigen sie jedoch stark an und erreichen sehr schnell Werte, die für die Anforderungen des Liegenschaftskatasters nicht mehr akzeptabel sind. Schon bei einem Abstand von  $s_d = 10$  km ergibt sich hierfür eine Größenordnung von  $\sigma_{x,e} \sim 10$  cm.

Man kann natürlich argumentieren, dass auch in diesen Fällen die relative Genauigkeit zwischen unmittelbar benachbarten Grenzpunkten weiterhin eine Größenordnung erreicht, die letztendlich für die Festlegung der einzelnen Liegenschaften ausreicht. Dieses hinzunehmen würde jedoch bedeuten, dass moderne globale Techniken, wie der Satellitenpositionierungsdienst der deutschen Landesvermessung (SAPOS®), nur eingeschränkt verwendet werden können.

Um den technischen Rationalisierungsgewinn der modernen Messverfahren nach der Bezugssystemumstellung voll ausnutzen zu können, ist es bei den hier festgestellten Genauigkeitsverhältnissen erforderlich, ein deutlich engeres Netz identischer Punkte vorzuhalten. Vor dem Hintergrund der erreichten Ergebnisse ist die Entscheidung getroffen worden, das D-Netz in Schleswig-Holstein bis auf 1 TP/km<sup>2</sup> zu verdichten, um darauf aufbauend ein regelmäßiges Raster mit einer Gitterweite von 1 km für die eigentliche Überführung der Detailpunkte in das ETRS89 zu berechnen.

Zur Überprüfung der hier gemachten Abschätzung ist weiterhin ein 4 × 4 km großer Ausschnitt eines neu vermessenen AP-Netzes mit 124 Punkten herangezogen worden. Die entsprechenden Netzausgleichungen wurden sowohl im DHDN90 als auch im ETRS89 durchgeführt, die dabei erreichten Standardabweichungen belaufen sich auf  $\sigma_{x,d} = 1,4$  cm bzw.  $\sigma_{x,e} = 0,8$  cm.

Die zugehörige Kovarianzfunktion des D-Netzes in dem gewählten Testgebiet kann mit einer Standardabweichung von  $\sigma_{x,d} = 3,2$  cm und einer zugehörigen Halbwertsbreite von  $s_{h,x,d} = 0,8$  km abgeschätzt werden. Das auf dieser Grundlage berechnete 1 km-Gitter ist anschließend verwendet worden, um die ausgewählten AP mit dem Formfunktionsansatz vom DHDN90 ins ETRS89 zu transformieren.

Die Parameter der Kovarianzfunktion für die Differenzen zwischen den transformierten und den durch Messung entstandenen ETRS89-Koordinaten ergeben sich zu  $\sigma_{x,de,1km} = 1,2$  cm und  $s_{h,x,de,1km} = 0,3$  km. Die Standardabweichung der transformierten Koordinaten reduziert sich damit auf  $\sigma_{x,e,1km} = 0,9$  cm.

Dieses Ergebnis entspricht durchaus der vorstehend beschriebenen Erwartung, dass ein Punkthaufen mit einer beschränkten Genauigkeit, aber merklichen Erhaltungsneigung, durch ein ausreichend dichtes Netz präziser Stützpunkte qualitativ verbessert werden kann. Da die Halbwertsbreite im Untersuchungsgebiet mit

$s_{h,x,d} = 0,8$  km den im D-Netz gegebenen Punktabstand von durchschnittlich 1 km nahezu erreicht, wird eine merkliche Korrelation zwischen den benachbarten TP von  $\rho \sim 0,3$  deutlich. Diesem Umstand ist es zu verdanken, dass die Standardabweichung des DHDN90 mit  $\sigma_{x,d} = 1,4$  cm nach der Transformation in das ETRS89 auf einen Wert von  $\sigma_{x,e,1km} = 0,9$  cm zurückgeht.

Bis zum Abschluss der laufenden TP-Netzverdichtung ist für eine zwischenzeitliche Bereitstellung der vorhandenen geotopographischen Rasterdaten (DTK25V, DTK50V, ... DOP5) im ETRS89 auf der Grundlage des bestehenden C-Netzes ein weiteres durch den Blattschnitt der TK25 gegebenes Gitter berechnet worden. Die Gitterweite beträgt hier etwa 11 km, der darauf basierende Transformationsansatz soll nur für zwischenzeitliche Vertriebszwecke und nicht zur eigentlichen Überführung der bestehenden Geobasis- und Geofachdaten benutzt werden.

Transformiert man auf der Grundlage dieses Gitters die AP des vorstehend beschriebenen Testgebietes, dann erhält man für die Kovarianzfunktion der Differenzen folgende Werte:  $\sigma_{x,de,11km} = 13,9$  cm und  $s_{h,x,e,11km} = 9,4$  km. Die so verifizierte Standardabweichung von etwa  $\sigma_{x,e,11km} \sim 10$  cm reicht für die Bereitstellung geotopographischer Rasterdaten völlig aus; sie entspricht darüber hinaus den durch die Abb. 4 dargestellten allgemeinen Verhältnissen.

Die grundsätzlichen Überlegungen und die mit Hilfe eines praktischen Beispiels gewonnenen numerischen

Ergebnisse zeigen, dass mit einem ausreichend dichten Festpunktfeld von 1 TP/km<sup>2</sup> für die ins ETRS89 transformierten Koordinaten Genauigkeiten von bis zu  $\sigma_{x,e,1km} \sim 1$  cm erreicht werden können. Da die bestehenden Koordinaten des DHDN90 jedoch nicht durch einen geschlossenen und homogenen Ansatz bestimmt worden sind, ist diese hohe Qualität sicherlich nicht durchgängig zu garantieren, eine diesbezügliche Erwartung von  $\sigma_{x,e,1km} \sim 2$  cm erscheint jedoch gerechtfertigt. Durch die merkliche Korrelation von  $\rho \sim 0,3-0,4$  im DHDN90 und die präzisen Koordinaten im ETRS89 werden die Standardabweichungen der transformierten Punkte kleiner ausfallen als die ursprünglichen Werte des DHDN90.

#### Literatur

- Boljen, J., Ein Vorschlag zur Einführung des ETRS89 als neues amtliches Bezugssystem. ZfV 120, S. 489–497, 1995.
- Boljen, J., Bezugssystemwechsel vom DHDN90 zum ETRS89 durch Transformations- und Formfunktionsansätze. Vermessungswesen und Raumordnung 58, S. 41–47, 1996.
- Boljen, J., Zur Transformation von Koordinaten vom DHDN90 in das ETRS89. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten 104, S. 294–300, 1997.
- Zienkiewicz, O. C., The finite element method. McGraw Hill Book Company, London, 1977.

#### Anschrift des Autors

Dr.-Ing. habil. Joachim Boljen  
Direktor des Landesvermessungsamts Schleswig-Holstein  
Mercatorstraße 1  
24106 Kiel