

# Die meridiantreue Projektion der Kugel in die Ebene als Lösung einer Anfangswertaufgabe (Kinematik)

Eberhard Mittermayer

## Zusammenfassung

Die bekannte meridiantreue Abbildung einer Kugel in die Ebene wird als geometrisch-kinematischer Projektionsvorgang in der  $(y, z)$ -Ebene erkannt, die exakte Lösung einer Anfangswertaufgabe (AWA). Grundlage ist das vom Autor eingeführte Koordinatensystem geodätischer Kugelkoordinaten (1995). Die Richtungen der in der  $(y, z)$ -Ebene auftretenden Geschwindigkeitsvektoren sind für die Zeit  $t \rightarrow \infty$  eindeutig als Ortsfunktionen definiert, obwohl gleichzeitig deren Beträge gegen Null streben; ein Beispiel.

## Summary

The well-known mapping of a sphere into a plane, which preserves the length of meridians, is identified as a geometric-kinematic projection procedure in the  $(y, z)$ -plane. It is an exact solution of an initial value problem (IVP). The basis is the coordinate system of geodetic spherical coordinates, which was introduced by the author (1995). The directions of the velocity vectors which appear in the  $(y, z)$ -plane are defined uniquely as position functions for the time point  $t \rightarrow \infty$ , in spite of the fact that their lengths tend towards zero; one example.

## 1 Einleitung

Die meridiantreue Abbildung einer gegebenen Kugel in die Ebene, z. B. der Erdkugel  $r = R$ , ist dem Geodäten vertraut. Diese Abbildung in transversaler Betrachtung wurde von dem Geodäten Soldner (1776-1833) eingeführt (siehe hierzu Heck 1995, Kuntz 1983). Bezeichnet man auf der Erdkugel mit  $\bar{u}$  die Bogenlänge auf dem Äquator sowie mit  $\bar{v}$  die Bogenlänge auf dem Meridian, so erhalten wir die Abbildung des Punktes  $P(\bar{u}, \bar{v})$  (Urbild) in die Ebene  $P'(y, z)$  (Abbild), in dem die Flächenparameter  $(\bar{u}, \bar{v})$  (geodätische Parallelkoordinaten) als ebene kartesische Koordinaten identifiziert werden. Das sind die bekannten Abbildungsgleichungen in der mathematischen Geodäsie

$$y = \bar{u}, \quad z = \bar{v}. \quad (1)$$

Als meridiantreues Abbild der Erdkugel  $r = R$  in die Ebene erhalten wir ein Rechteck der Größe  $2R\pi * R\pi$ . Diese Abbildungsgleichungen (1) stellen lediglich eine mathematische Zuordnung dar, eine schlichte Vorstellung ohne Geometrie. Den Begriff Projektion verwendet man, wenn das Abbild geometrisch erklärt werden kann; d. h. man kennt den Projektionsvorgang. Als klassisches Beispiel

sei die stereografische Projektion genannt. Bislang ist der Projektionsvorgang, der die meridiantreue Abbildung einer Kugel in die Ebene geometrisch erklärt, unbekannt. Die Lösung dieses Problems – ca. 200 Jahre nach Soldner – wird im Folgenden dargestellt. Mit diesem Beitrag ist es nunmehr zulässig, von einer *meridiantreuen Projektion* zu sprechen.

## 2 Grundlagen

Betrachten wir eine Kugel  $r = \text{const.}$ , so bilden die Parameterlinien  $\bar{u} = \text{const.}$  (Meridiane) und  $\bar{v} = \text{const.}$  (Parallelkreise) ein Netz geodätischer Parallelkoordinaten  $(\bar{u}, \bar{v})$  mit dem bekannten Linienelement

$$ds^2 = \begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos^2\left(\frac{\bar{v}}{r}\right) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

(siehe hierzu Heck 1995, S. 132). Der Punkt  $P(\bar{u}, \bar{v})$  der Kugel  $r = \text{const.}$  ist eingebettet in den 3-dimensionalen Euklidischen Raum  $R^3$ . Bislang fehlte in der mathematischen Geodäsie eine Verallgemeinerung des Linienelementes (2). Der Schlüssel hierzu bestand in der Einführung eines Koordinatensystems, das neben den Flächenparametern  $(\bar{u}, \bar{v})$  (geodätische Parallelkoordinaten) den Radius der Kugel als weitere Variable enthält.

Ausgehend von den klassischen Kugelkoordinaten  $P(r, \lambda, \phi)$  und den Transformationen

$$\lambda = \frac{\bar{u}}{r}, \quad \phi = \frac{\bar{v}}{r} \quad (3)$$

folgt die Vektordarstellung

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{\bar{u}}{r}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{r}\right) \\ r \sin\left(\frac{\bar{u}}{r}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{r}\right) \\ r \sin\left(\frac{\bar{v}}{r}\right) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

das vom Autor eingeführte Koordinatensystem *geodätischer Kugelkoordinaten*  $P(r, \bar{u}, \bar{v})$  (1995); siehe Abb. 1.

In diesem Koordinatensystem haben nunmehr alle drei Parameter  $r, \bar{u}, \bar{v}$  eine Dimension  $[m]$ . Die Winkel  $\lambda$  und  $\phi$  sind *abgeleitete* Größen (3). Die  $r$ -Linien klassischer

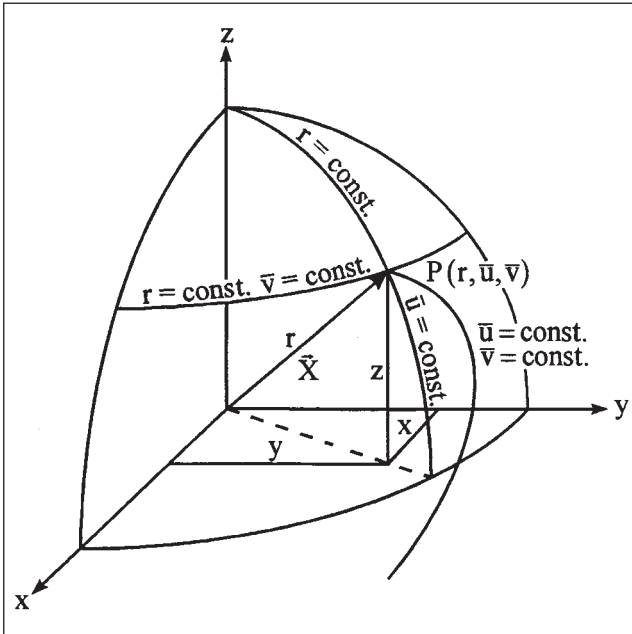


Abb. 1: Geodätische Kugelkoordinaten  $P(r, \bar{u}, \bar{v})$

Kugelkoordinaten  $P(r, \lambda, \phi)$  unterscheiden sich wesentlich von den  $r$ -Linien dieser geodätischen Kugelkoordinaten  $P(r, \bar{u}, \bar{v})$ . Während im  $P(r, \lambda, \phi)$ -System die  $r$ -Linien ( $\lambda = const., \phi = const.$ ) eine Schar von Geraden darstellen, erkennen wir im Koordinatensystem geodätischer Kugelkoordinaten die  $r$ -Linien ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) als Raumkurven; lediglich die  $r$ -Linie ( $\bar{u} = 0, \bar{v} = 0$ ) ist eine Gerade, nämlich die  $x$ -Achse. Zur Geometrie der Sonderfälle von  $r$ -Linien ( $\bar{u} = 0, \bar{v} = const. \neq 0$ ) bzw. ( $\bar{u} = const. \neq 0, \bar{v} = 0$ ) siehe in den Grundlagen Mittermayer (1998, S. 156).

Mit den Tangentenvektoren an die  $r$ -Linie ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) (Raumkurve):  $\partial \vec{X} / \partial r$ ,  $\bar{u}$ -Linie ( $r = const., \bar{v} = const.$ ) (Parallelkreis):  $\partial \vec{X} / \partial \bar{u}$  und  $\bar{v}$ -Linie ( $r = const., \bar{u} = const.$ ) (Meridian):  $\partial \vec{X} / \partial \bar{v}$  folgt die Verallgemeinerung des Linienelementes (2)

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dr \\ d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} dr \\ d\bar{u} \\ d\bar{v} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

eine quadratische Form mit der Transformationsmatrix (Metriktenor)

$$M = J^T J, \quad (6)$$

der Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial z}{\partial \bar{v}} \end{pmatrix} \quad (7)$$

und dem Ergebnis (6)

$$M = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\bar{v}^2 + \bar{u}^2 \cos^2\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)}{r^2} & -\frac{\bar{u}}{r} & -\frac{\bar{v}}{r} \\ -\frac{\bar{u}}{r} & \cos^2\left(\frac{\bar{v}}{r}\right) & 0 \\ -\frac{\bar{v}}{r} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Für  $r = const.$  ( $dr = 0$ ) folgt als Sonderfall das Linienelement im Quadrat (2).

### 3 Die Anfangswertaufgabe (Kinematik)

#### 3.1 Die Bahnkurve

Die im Koordinatensystem geodätischer Kugelkoordinaten  $P(r, \bar{u}, \bar{v})$  auftretenden  $r$ -Linien ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) (Raumkurven), dargestellt durch den Ortsvektor (4), können als Bahnkurven gedeutet werden; d. h. es existiert eine Verbindung zur Kinematik.

Mit dem Radius der Kugel als Funktion der Zeit

$$r = r(t) \quad [m], \quad (9)$$

eine eindeutige Funktion mit den Eigenschaften

$$r(0) = 0, \quad r \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty, \quad (10)$$

erhalten wir eine Schar von Bahnkurven ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ), dargestellt durch Ortsvektoren als Funktion der Zeit

$$\vec{X}(t; \bar{u}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} x(t; \bar{u}, \bar{v}) \\ y(t; \bar{u}, \bar{v}) \\ z(t; \bar{u}, \bar{v}) \end{pmatrix} \quad (11)$$

mit den Komponenten

$$\begin{cases} x = r(t) \cos\left[\frac{\bar{u}}{r(t)}\right] \cos\left[\frac{\bar{v}}{r(t)}\right] \\ y = r(t) \sin\left[\frac{\bar{u}}{r(t)}\right] \cos\left[\frac{\bar{v}}{r(t)}\right] \\ z = r(t) \sin\left[\frac{\bar{v}}{r(t)}\right] \end{cases}. \quad (12)$$

Für den Betrag des Ortsvektors beliebiger Bahnkurven ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) folgt

$$|\vec{X}(t; \bar{u}, \bar{v})| = r(t), \quad (13)$$

d. h. zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t > 0$  ist der geometrische Ort aller Punkte  $P[r(t), \bar{u}, \bar{v}]$  der Bahnkurven stets die Kugelfläche mit dem Radius  $r(t)$ . Im Sonderfall  $t = 0$  erkennen wir im Ursprung des Koordinatensystems  $r = 0$  den Anfang aller Bahnkurven.

Die Anzahl möglicher Funktionen hinsichtlich  $r(t)$  ist nicht beschränkt. Der einfachste Ansatz wäre

$$r = ct \left[ \frac{m}{sec} \right]; \tag{14}$$

d. h. in diesem Fall entfernen sich die Punkte längs beliebiger Bahnkurven ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) mit konstanter Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = c \left[ \frac{m}{sec} \right]; \tag{15}$$

$c > 0$  beliebig.

Eine weitere Möglichkeit wäre der Ansatz

$$r = \frac{1}{2}ct^2 \left[ \frac{m}{sec} \right]; \tag{16}$$

d. h. in diesem Fall durchlaufen die Punkte *dieselben* Bahnkurven derart, dass die Radialgeschwindigkeit proportional mit der Zeit zunimmt

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = ct \left[ \frac{m}{sec} \right]. \tag{17}$$

Hierbei ist  $c > 0$  eine beliebige Konstante mit der Dimension einer Beschleunigung. Man erkennt, dass die Geometrie der Bahnkurven (11) bezüglich denkbarer Funktionen  $r(t)$  invariant ist; die Kinematik ändert sich. Als Beispiel betrachten wir die Bahnkurve

$$\bar{u} = 6\,000\,000 \text{ m}, \quad \bar{v} = 8\,000\,000 \text{ m} \tag{18}$$

in Verbindung mit dem einfachsten Ansatz bezüglich der Funktion  $r(t)$  (14) und der gewählten Radialgeschwindigkeit

$$c = 6\,378\,000 \frac{m}{sec}. \tag{19}$$

Die Abb. 2 zeigt die Projektion  $P'''$  der Bahnkurve (18) in die  $(x, y)$ -Ebene, dargestellt durch den Ortsvektor

$$\vec{X}''' = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \cos\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ ct \sin\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Die Abb. 3 zeigt die Projektion  $P''$  der Bahnkurve (18) in die  $(x, z)$ -Ebene, dargestellt durch den Ortsvektor

$$\vec{X}'' = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \cos\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ ct \sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Die Projektionen  $P'''$  und  $P''$  zu den Zeitpunkten  $t = 1.0(0.5)3.0 \text{ sec}$  sind in den Abbildungen Abb. 2 und Abb. 3 besonders hervorgehoben. Im Weiteren erkennt man, dass sich die Bahnkurven ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) für  $t \rightarrow \infty$  asymptotisch parallel zur  $x$ -Achse verhalten.

### 3.2 Die Bahngeschwindigkeit

Mit der Vektordarstellung der Bahnkurve ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) (11) und dem einfachsten Ansatz bezüglich der Funktion  $r(t)$  (14) folgt der Geschwindigkeitsvektor

$$\dot{\vec{X}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \frac{dr}{dt} = c \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \tag{22}$$

mit dem Ergebnis

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{pmatrix} \tag{23}$$

und den Ortsfunktionen

$$\begin{aligned} f_{11} &= \cos\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ &+ \frac{\bar{u}}{ct} \sin\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ &+ \frac{\bar{v}}{ct} \cos\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ f_{12} &= \sin\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ &- \frac{\bar{u}}{ct} \cos\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ &+ \frac{\bar{v}}{ct} \sin\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ f_{13} &= \sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) - \frac{\bar{v}}{ct} \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

Wir erhalten die Bahngeschwindigkeit

$$v(t) = |\dot{\vec{X}}| = c \sqrt{1 + \frac{\bar{v}^2 + \bar{u}^2 \cos^2\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right)}{c^2 t^2}} \left[ \frac{m}{sec} \right] \tag{25}$$

mit dem Grenzwert für  $t \rightarrow \infty$  bezüglich beliebiger Bahnkurven ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t; \bar{u}, \bar{v}) = c. \tag{26}$$

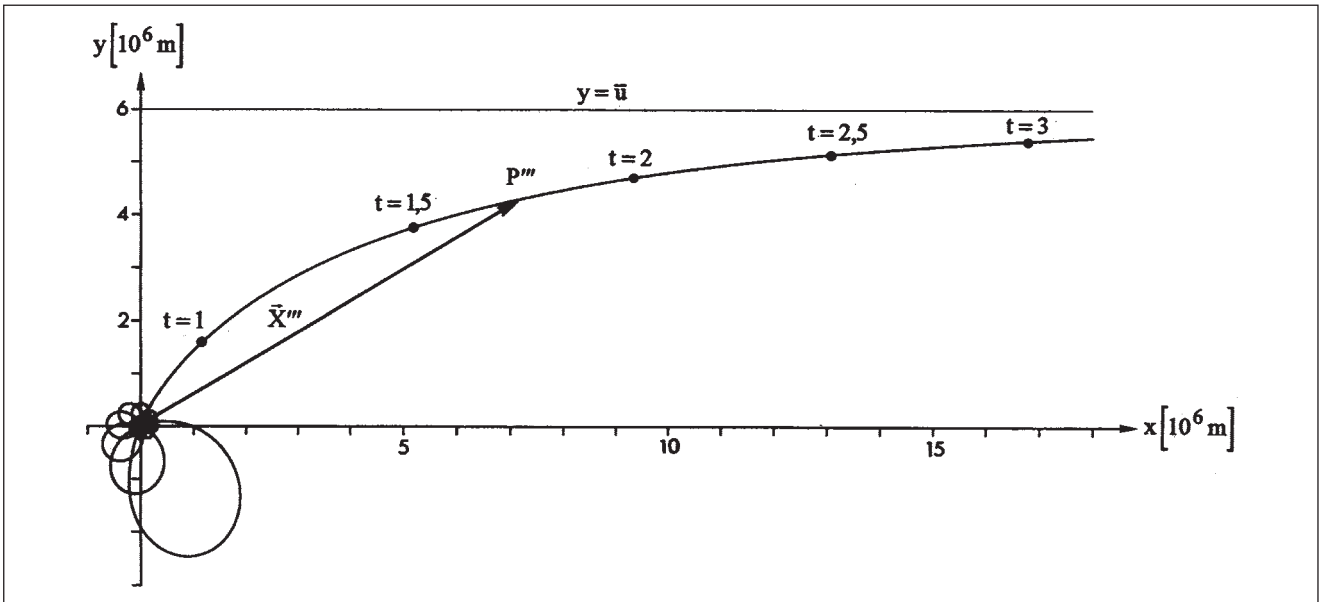


Abb. 2: Projektion  $P'''$  der  $r$ -Linie in die  $(x, y)$ -Ebene

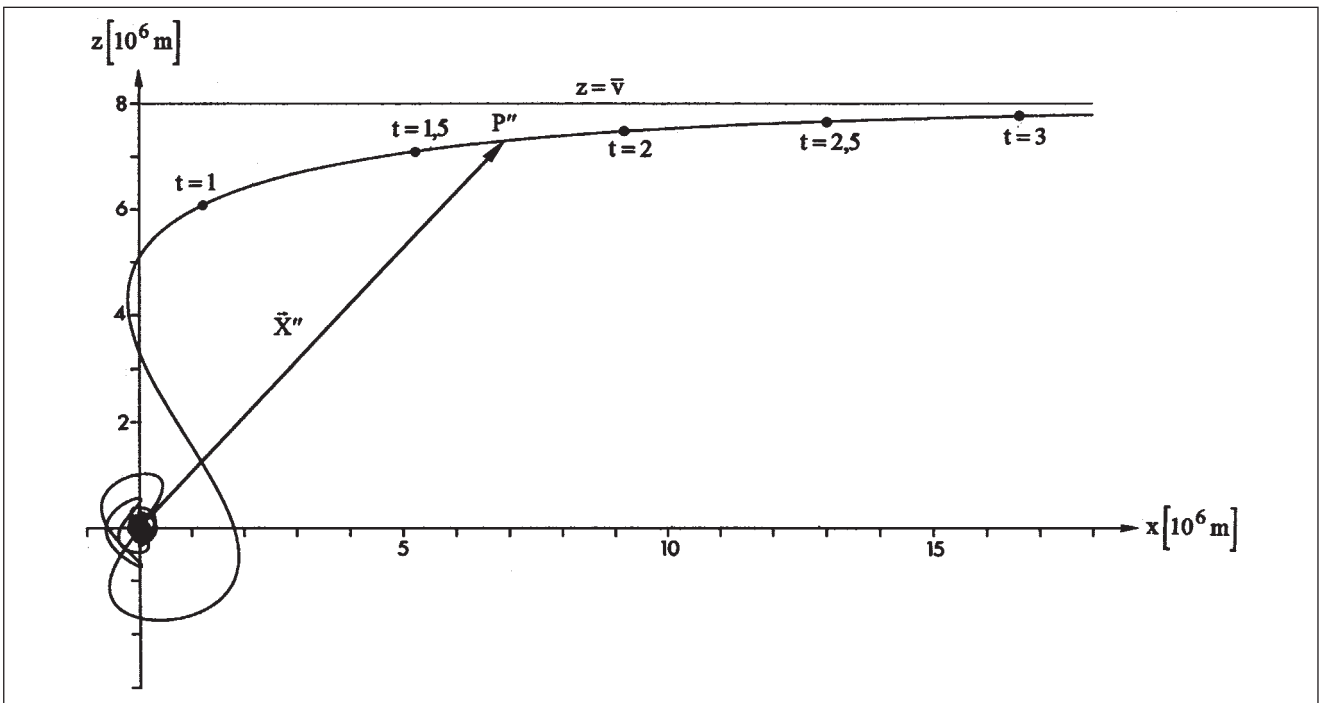


Abb. 3: Projektion  $P''$  der  $r$ -Linie in die  $(x, z)$ -Ebene

### 3.3 Die Projektion $P'$ der Bahnkurve in die $(y, z)$ -Ebene

Im Hinblick auf die meridiantreue Projektion der Kugel in die Ebene als geometrisch-kinematische Lösung einer Anfangswertaufgabe sind die Projektionen  $P'$  der Bahnkurven ( $\bar{u} = const., \bar{v} = const.$ ) in die  $(y, z)$ -Ebene von besonderem Interesse; siehe Abb. 4 (Einheit:  $10^6 m$ ).

Diese Abb. 4 zeigt in  $t = [0, \infty]$  die Projektion  $P'$  der Bahnkurve (18) in die  $(y, z)$ -Ebene, dargestellt durch den Ortsvektor

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \sin\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ ct \sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Wir sehen zur Zeit  $t = t_1 = 1 \text{ sec}$ , der Anfangszeit, die Projektion  $P'$  des Durchstoßpunktes  $P$  der Bahnkurve (18) mit der Kugel

$$r = ct_1 = R = 6\,378\,000 \text{ m}, \quad (28)$$

die Erdkugel. Im Weiteren ist in der Abb. 4 die Projektion des Geschwindigkeitsvektors

$$\dot{\vec{X}}' = \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} f_{12} \\ f_{13} \end{pmatrix} \quad (29)$$

mit seinem Betrag

$$v'(t) = \left| \dot{\vec{X}}' \right| = \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2} = c \sqrt{(f_{12})^2 + (f_{13})^2} \quad (30)$$

dargestellt. Wir erkennen eine klassische Anfangswertaufgabe mit ihrer exakten Lösung (27).

Die Lösungen der Anfangswertaufgabe zu den Zeitpunkten  $t = 2, 3, 4 \text{ sec}$  sind in der Abb. 4 besonders hervorgehoben. Wir erkennen eine Punktfolge, die für  $t \rightarrow \infty$  gegen den Punkt  $P'^{\infty}$  strebt

$$P'^{\infty} : \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{u}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \bar{v}; \quad (31)$$

d. h. die Parameter  $(\bar{u}, \bar{v})$  gehen über in kartesische Koordinaten. Dieses Ergebnis (31) folgt unter Beachtung der Regel von l'Hospital für  $t \rightarrow \infty$  im allgemeinen Fall ( $\bar{u} = \text{const.} \neq 0, \bar{v} = \text{const.} \neq 0$ ) sowie  $c = \text{const.} \neq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right)}{\left(\frac{1}{ct}\right)} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) = \bar{u} \quad [m] \quad (32)$$

sowie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right)}{\left(\frac{1}{ct}\right)} = \bar{v} \quad [m] \quad (33)$$

also das Ergebnis

$$P'^{\infty} : y = \bar{u} \quad [m], \quad z = \bar{v} \quad [m], \quad (34)$$

die Abbildungsgleichungen (1).

### 3.4 Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{\vec{X}}'$ für $t \rightarrow \infty$

Die Richtung  $\alpha$  der Projektion des Geschwindigkeitsvektors in die  $(y, z)$ -Ebene als Funktion der Zeit erhalten wir aus der Vektordarstellung (29)

$$\tan \alpha(t) = \frac{\dot{z}}{\dot{y}} = \frac{f_{13}}{f_{12}}, \quad (35)$$

siehe Abb. 4.

Mit den Grenzwerten der Ortsfunktionen  $f_{12}$  und  $f_{13}$  Box (24) für  $t \rightarrow \infty$  und ( $\bar{u} = \text{const.} \neq 0, \bar{v} = \text{const.} \neq 0$ ) sowie  $c = \text{const.} \neq 0$

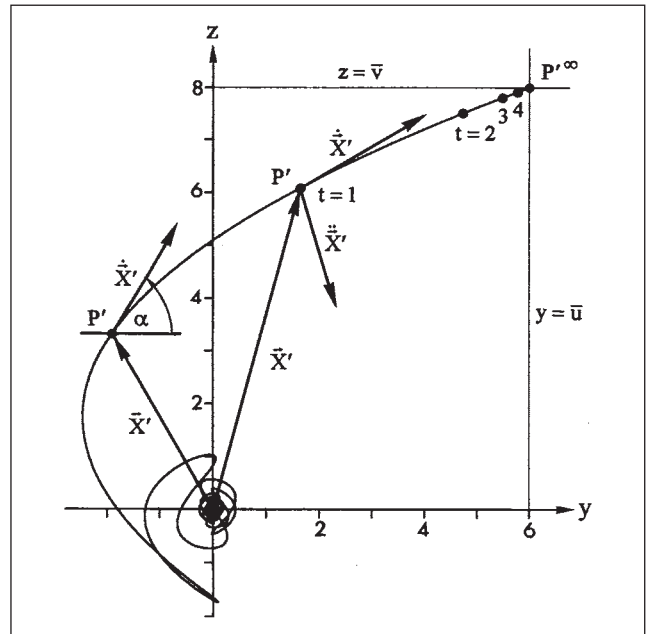


Abb. 4: Projektion  $P'$  der  $r$ -Linie in die  $(y, z)$ -Ebene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{12}(t; \bar{u}, \bar{v}) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f_{13}(t; \bar{u}, \bar{v}) = 0 \quad (36)$$

folgt für die Geschwindigkeit  $v'$  des Punktes  $P'$  in der  $(y, z)$ -Ebene aus (30) der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v'(t) = 0; \quad (37)$$

d. h. der Geschwindigkeitsvektor (29) strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen Nullvektor

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\vec{X}}' = \lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Damit erhalten wir für die Richtung des Geschwindigkeitsvektors einen unbestimmten Ausdruck

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan \alpha(t; \bar{u}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{z}}{\dot{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{0''}{0''}. \quad (39)$$

Mit dem Beschleunigungsvektor in der  $(y, z)$ -Ebene als zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors (29)

$$\ddot{\vec{X}}' = \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{c^2}{r^4} \begin{pmatrix} f_{22} \\ f_{23} \end{pmatrix} \quad \left[ \frac{m}{\text{sec}^2} \right] \quad (40)$$

und den Ortsfunktionen

$$\begin{aligned} f_{22} &= -(\bar{u}^2 + \bar{v}^2) ct \sin\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \\ &\quad - 2\bar{u}\bar{v}ct \sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{u}}{ct}\right) \quad [m^3] \\ f_{23} &= -\bar{v}^2 ct \sin\left(\frac{\bar{v}}{ct}\right) \quad [m^3] \end{aligned} \quad (41)$$

folgt unter Beachtung der Regel von l'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan \alpha(t; \bar{u}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\dot{z}}{\dot{y}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_{23}}{f_{22}}. \quad (42)$$

Der Grenzwert existiert. Mit den Grenzwerten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ ct \sin \left( \frac{\bar{u}}{ct} \right) \right] = \bar{u}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ ct \sin \left( \frac{\bar{v}}{ct} \right) \right] = \bar{v}$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos \left( \frac{\bar{u}}{ct} \right) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \cos \left( \frac{\bar{v}}{ct} \right) = 1$$

folgen die Grenzwerte der Ortsfunktionen  $f_{22}$  und  $f_{23}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{22}(t; \bar{u}, \bar{v}) = -\bar{u}^3 - 3\bar{u}\bar{v}^2 \quad (43)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{23}(t; \bar{u}, \bar{v}) = -\bar{v}^3. \quad (44)$$

Damit erhalten wir als Ergebnis den Grenzwert für die Richtung (35) des betrachteten Geschwindigkeitsvektors in der  $(y, z)$ -Ebene für  $t \rightarrow \infty$  im allgemeinen Fall ( $\bar{u} = \text{const.} \neq 0, \bar{v} = \text{const.} \neq 0$ )

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tan \alpha(t; \bar{u}, \bar{v}) = \tan \alpha^\infty = \frac{\bar{v}^3}{\bar{u}^3 + 3\bar{u}\bar{v}^2}, \quad (45)$$

eine Ortsfunktion kartesischer Koordinaten in dem Punkt  $P'^\infty$  (34) mit ungerader Symmetrie bezüglich  $\bar{u} = 0$  und  $\bar{v} = 0$ .

Zu dem betrachteten Beispiel der Bahnkurve (18) erhalten wir mit der Formel (45) die Richtung des Geschwindigkeitsvektors in dem Punkt  $P'^\infty$  (34)

$$\tan \alpha^\infty = \frac{64}{171}, \quad \alpha^\infty = 20^\circ 31' 9'' 5418.$$

### 3.5 Ein Beispiel

Wir betrachten im Koordinatensystem geodätischer Kugelkoordinaten  $P(r, \bar{u}, \bar{v})$  die Kugeloberfläche der Erdkugel mit dem Radius

$$r = R = 6\,378\,000 \text{ m}, \quad (46)$$

ein Gebiet  $G$ , definiert durch

$$\begin{aligned} R\pi \leq \bar{u} \leq 3R\pi \\ \text{(Südpol)} \quad \frac{3}{2}R\pi \leq \bar{v} \leq \frac{5}{2}R\pi \quad \text{(Nordpol)} \end{aligned} \quad (47)$$

mit  $\Delta\bar{u} = 2R\pi$  und  $\Delta\bar{v} = R\pi$ .

Die Punkte  $P(R, \bar{u}, \bar{v})$  der Erdkugel (46) erkennen wir als Durchstoßpunkte der Bahnkurven ( $\bar{u} = \text{const.}, \bar{v} = \text{const.}$ ) aus dem Definitionsbereich (47) mit der Erdkugel, bei gewählter Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = c = 6\,378\,000 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (48)$$

zum Zeitpunkt  $t = 1 \text{ sec}$ , der Anfangszeit. Die jeweilige Bahngeschwindigkeit der Punkte  $P$  zur Anfangszeit erhält man mit der Formel (25).

Die Abb. 5 zeigt die Projektion  $P'$  der Erdkugel  $r = R$  in die  $(y, z)$ -Ebene, dargestellt durch 9 Parallelkreise für  $j = 0(1)8$

$$\bar{v}_j = \frac{3}{2}R\pi + j \frac{\pi}{8}R, \quad R\pi \leq \bar{u} \leq 3R\pi$$

und 17 Meridiane für  $j = 0(1)16$

$$\bar{u}_j = R\pi + j \frac{\pi}{8}R, \quad \frac{3}{2}R\pi \leq \bar{v} \leq \frac{5}{2}R\pi,$$

das Anfangsbild zur Zeit  $t = 1 \text{ sec}$ .

Für  $j = 0$  bzw.  $j = 8$  entarten die Parallelkreise auf der Erdkugel als Südpol bzw. Nordpol. Die Einheit in der Abb. 5 ist gleich  $10^6 \text{ m}$ .

Wir erkennen bezüglich der Projektionen der Meridiane  $\bar{u}_j = \text{const.}$  zur Anfangszeit  $t = 1 \text{ sec}$  folgende Eigenschaften:

- a) Eindeutigkeit der Meridiane für  $j = 4; 12$ ;
  - b) Zweideutigkeit der Meridiane für  $j = 1, 7; 2, 6; 3, 5; 9, 15; 10, 14; 11, 13$ ;
  - c) Dreideutigkeit der Meridiane für  $j = 0, 8, 16$ .
- Demnach sind in der Abb. 5 neun Projektionen sichtbar.

Zu den Zeitpunkten  $t > 1 \text{ sec}$ , z. B.  $t = 2, 3, 4, 5, \dots [\text{sec}]$ , erhalten wir als exakte Lösungen der AWA eine Bildfolge, die für  $t \rightarrow \infty$  gegen ein äquidistantes Gitternetz strebt, die meridiantreue Abbildung des Gebietes  $G$  (47) (Erdkugel) in die Ebene, nunmehr als Projektionsvorgang erklärt. Die Abb. 6 zeigt das Anfangsbild zur Zeit  $t = 1 \text{ sec}$  und die Lösung der AWA zur Zeit  $t = 8 \text{ sec}$ , entsprechend die Abb. 7 zur Zeit  $t = 100 \text{ sec}$ .

Im Weiteren sind in diesen beiden Abbildungen 4 Projektionen  $P'_i$  ausgewählter Bahnkurven in  $1 \leq t \leq 8 \text{ sec}$  bzw. in  $1 \leq t \leq 100 \text{ sec}$  dargestellt. Es sind die Bahnkurven ( $\bar{u} = \text{const.}, \bar{v} = \text{const.}$ )

$$\begin{aligned} P'_1: \quad \bar{u}_1 &= R\pi, & \bar{v}_1 &= \frac{3}{2}R\pi \\ P'_2: \quad \bar{u}_2 &= 3R\pi, & \bar{v}_2 &= \frac{3}{2}R\pi \\ P'_3: \quad \bar{u}_3 &= 3R\pi, & \bar{v}_3 &= \frac{5}{2}R\pi \\ P'_4: \quad \bar{u}_4 &= R\pi, & \bar{v}_4 &= \frac{5}{2}R\pi \end{aligned} \quad (49)$$

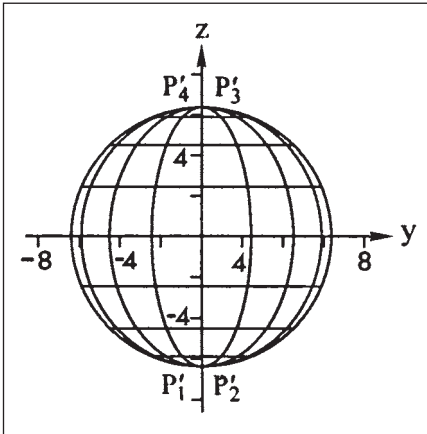


Abb. 5: Das Anfangsbild zur Zeit  $t=1$  sec

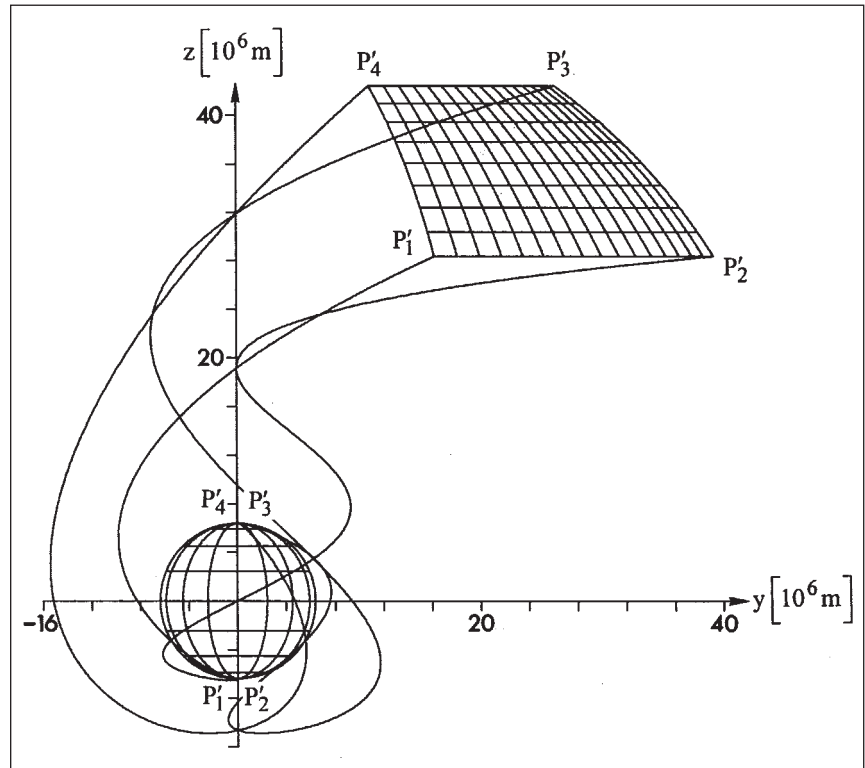


Abb. 6: Anfangsbild und Lösung der AWA zur Zeit  $t=8$  sec

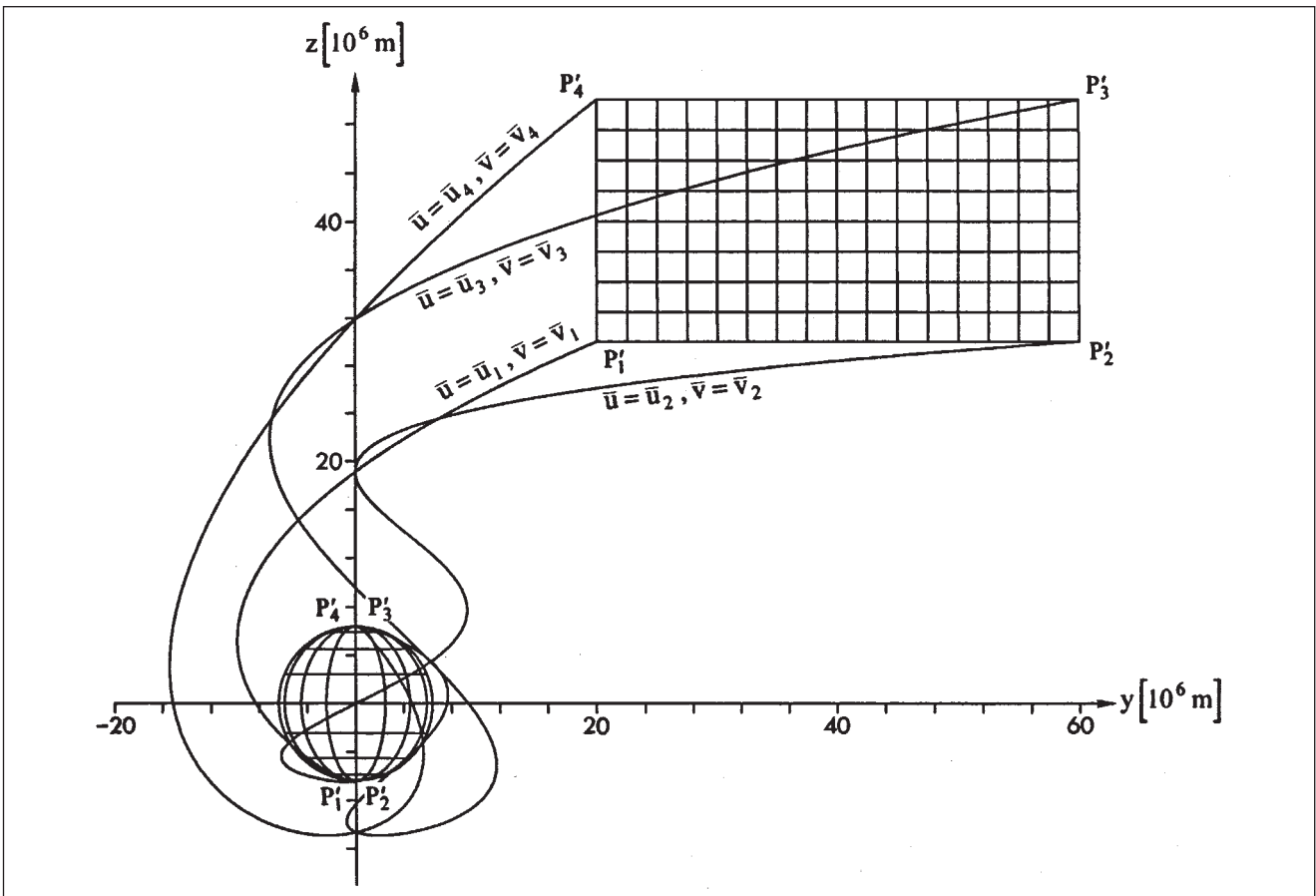


Abb. 7: Anfangsbild und Lösung der AWA zur Zeit  $t=100$  sec

Die Abstände  $d'_{ij}$  der Punkte  $P'_i$  und  $P'_j$  in der  $(y, z)$ -Ebene sind Funktionen der Zeit

$$d'_{ij}(t) = \sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (50)$$

mit  $P'_i(y_i, z_i)$  gemäß (27)

$$\begin{cases} y_i(t) = ct \sin\left(\frac{\bar{u}_i}{ct}\right) \cos\left(\frac{\bar{v}_i}{ct}\right) \\ z_i(t) = ct \sin\left(\frac{\bar{v}_i}{ct}\right) \end{cases}, \quad (51)$$

analog für  $P'_j$ . Mit (32),(33) folgen die Grenzwerte der Abstände  $d'_{ij}$  (50) für  $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d'_{ij}(t) = d'_{ij}{}^\infty = \sqrt{(\bar{u}_j - \bar{u}_i)^2 + (\bar{v}_j - \bar{v}_i)^2} = \sqrt{\Delta \bar{u}^2 + \Delta \bar{v}^2}. \quad (52)$$

Zu dem betrachteten Beispiel erhalten wir folgende Ergebnisse

$$\begin{aligned} d'_{12}{}^\infty &= d'_{34}{}^\infty = 2R\pi = 40\,074\,155.889 \text{ m} \\ d'_{23}{}^\infty &= d'_{14}{}^\infty = R\pi = 20\,037\,077.945 \text{ m} \\ d'_{13}{}^\infty &= d'_{24}{}^\infty = R\pi\sqrt{5} = 44\,804\,268.355 \text{ m} \end{aligned}$$

Zur räumlichen Vorstellung des Projektionsvorganges denke man sich die Erdkugel  $r = R$  in Verbindung mit den Bahnkurven ( $\bar{u} = \text{const.}$ ,  $\bar{v} = \text{const.}$ ) aus dem Definitionsbereich (47) krummlinig in eine Kugel mit dem Radius  $r = 8R$  meridiantreu projiziert. Projiziert man das erhaltene Bild nunmehr in die  $(y, z)$ -Ebene, so folgt die in der Abb. 6 dargestellte Lösung der AWA zum Zeitpunkt  $t = 8 \text{ sec}$ . Entsprechend denke man sich zur Abb. 7 die krummlinige meridiantreue Projektion der Erdkugel in die Kugel mit dem Radius  $r = 100 R$ .

Im Weiteren betrachten wir in der  $(y, z)$ -Ebene die Projektionen der Geschwindigkeitsvektoren bezüglich  $P'_1$  und  $P'_3$  (49) mit der Radialgeschwindigkeit (48) gemäß (29)

$$\dot{X}'_i = \dot{X}'(t; \bar{u}_i, \bar{v}_i) \quad \text{für } i = 1, 3 \quad (53)$$

sowie ihre Richtungen für  $t \rightarrow \infty$  (45), die Grenzwerte

$$\tan \alpha_i{}^\infty = \frac{\bar{v}_i^3}{\bar{u}_i^3 + 3\bar{u}_i\bar{v}_i^2} \quad \text{für } i = 1, 3 \quad (54)$$

in den Punkten  $P'_i{}^\infty$

$$\begin{aligned} P'_1{}^\infty: & y = \bar{u}_1 = R\pi, \quad z = \bar{v}_1 = \frac{3}{2}R\pi \\ P'_3{}^\infty: & y = \bar{u}_3 = 3R\pi, \quad z = \bar{v}_3 = \frac{5}{2}R\pi \end{aligned} \quad (55)$$

Wir erhalten die Ergebnisse

$$\tan \alpha_1{}^\infty = \frac{27}{62}, \quad \alpha_1{}^\infty = 23^\circ 31' 56''.4548$$

und

$$\tan \alpha_3{}^\infty = \frac{125}{666}, \quad \alpha_3{}^\infty = 10^\circ 37' 48''.1563$$

sowie die Differenz

$$\gamma_{13}{}^\infty = \alpha_1{}^\infty - \alpha_3{}^\infty = 12^\circ 54' 8''.2985. \quad (56)$$

Der Winkel  $\gamma_{13}$  zwischen den Geschwindigkeitsvektoren (53) als Funktion der Zeit folgt direkt aus dem Skalarprodukt

$$\cos \gamma_{13}(t; \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_3, \bar{v}_3) = \frac{\langle \dot{X}'_1, \dot{X}'_3 \rangle}{|\dot{X}'_1| |\dot{X}'_3|}. \quad (57)$$

Mit den Geschwindigkeitsvektoren (53) für  $i = 1, 3$

$$\dot{X}'_i = c \begin{pmatrix} f_{12}^i \\ f_{13}^i \end{pmatrix} \quad (58)$$

und den Beträgen

$$|\dot{X}'_i| = c \sqrt{(f_{12}^i)^2 + (f_{13}^i)^2} \quad (59)$$

erhalten wir die Rechenformel für den Winkel  $\gamma_{13}$  als Funktion der Zeit

$$\cos \gamma_{13}(t) = \frac{f_{12}^1 f_{12}^3 + f_{13}^1 f_{13}^3}{\sqrt{(f_{12}^1)^2 + (f_{13}^1)^2} \sqrt{(f_{12}^3)^2 + (f_{13}^3)^2}}. \quad (60)$$

Mit den Eigenschaften der Ortsfunktionen  $f_{12}$  und  $f_{13}$  für  $t \rightarrow \infty$  (36) folgt der unbestimmte Ausdruck

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos \gamma_{13}(t; \bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_3, \bar{v}_3) = \frac{0''}{0''}. \quad (61)$$

Der Grenzwert existiert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \cos \gamma_{13}(t) = \cos \gamma_{13}{}^\infty. \quad (62)$$

Mit der Formel (45) erhalten wir für  $i = 1, 3$  in  $P'^\infty$  (34) die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_i{}^\infty = \frac{1}{\sqrt{\bar{v}_i^6 + (\bar{u}_i^3 + 3\bar{u}_i\bar{v}_i^2)^2}} \begin{pmatrix} \bar{u}_i^3 + 3\bar{u}_i\bar{v}_i^2 \\ \bar{v}_i^3 \end{pmatrix}$$



und damit den Grenzwert (62) als Skalarprodukt

$$\cos \gamma_{13}^{\infty} = \langle \vec{e}_1^{\infty}, \vec{e}_3^{\infty} \rangle, \quad (63)$$

$$\cos \gamma_{13}^{\infty} = \frac{\bar{v}_1^3 \bar{v}_3^3 + (\bar{u}_1^3 + 3\bar{u}_1 \bar{v}_1^2)(\bar{u}_3^3 + 3\bar{u}_3 \bar{v}_3^2)}{\sqrt{\bar{v}_1^6 + (\bar{u}_1^3 + 3\bar{u}_1 \bar{v}_1^2)^2} \sqrt{\bar{v}_3^6 + (\bar{u}_3^3 + 3\bar{u}_3 \bar{v}_3^2)^2}}$$

(64)

und zum betrachteten Beispiel (55) das Ergebnis

$$\cos \gamma_{13}^{\infty} = \frac{44\,667}{\sqrt{2\,099\,834\,713}}, \quad \gamma_{13}^{\infty} = 12^{\circ} 54' 8''.2985$$

siehe (56).

#### Literatur

- Heck, B.: Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Herbert Wichmann Verlag, 2. Auflage, Karlsruhe, 1995.  
 Kuntz, E.: Kartennetzentwurfslehre. Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1983.  
 Mittermayer, E.: Geodätische Kugelkoordinaten. Allgemeine Vermessungsnachrichten 102, S. 180–195, 1995.  
 Mittermayer, E.: Die Kugel, Wissenschaft und Technik Verlag Dr. Jürgen Groß, 2. erweiterte Auflage, Berlin, 1998.

#### Anschrift des Autors

Univ. Prof. Dr.-Ing. Eberhard Mittermayer  
 TU Berlin  
 Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik  
 Sekr. H12  
 Straße des 17. Juni 135  
 10623 Berlin  
 mit@mca.bv.tu-berlin.de