

Die Mercator-Projektion als Lösung einer Anfangswertaufgabe (Kinematik)

Eberhard Mittermayer

Zusammenfassung

Die Mercator-Abbildung einer Kugel (Kugelzone) in die Ebene wird als exakte Lösung einer Anfangswertaufgabe (AWA) betrachtet. Hierzu existieren gewöhnliche Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung. Zur Zeit $t = t_1$ erkennen wir ein Anfangsbild, die Projektion einer Kugelzone z.B. der Erdkugel in die (y, z) -Ebene. Für $t > t_1$ ergeben die Lösungen der AWA eine Bildfolge, die für $t \rightarrow \infty$ gegen die Mercator-Abbildung der Kugelzone in die Ebene strebt. Das Problem der periodischen Bilder der Kugelzone (n -fache Umläufe) ist mit der dargestellten Theorie als Lösung einer AWA erklärbar. Grundlage ist das vom Autor eingeführte Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$. In diesem Koordinatensystem ist der Punkt P im R^3 der Schnitt dreier biharmonischer Flächen. Die metrische Größe \bar{z} mit der Dimension $[m]$ verhält sich direkt proportional zum minimalen Hauptkrümmungshalbmesser der biharmonischen Fläche $\bar{z} = const.$ (Drehfläche). Mit der Wahl des einfachsten Ansatzes $r = ct$, eingeführt in das Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten, folgt die Verbindung zur Kinematik. Der Beitrag enthält drei Beispiele.

Summary

The Mercator mapping of a sphere (spherical zone) into a plane is presented in form of an exact solution of an initial value problem (IVP). There are respective ordinary differential equations of the first and second order. At the time point $t = t_1$ there is an initial pattern representing a projection of a spherical zone (for instance of the Earth sphere) into the (y, z) -plane. For $t > t_1$, the solutions of IVP yield a sequence of patterns, which converge for $t \rightarrow \infty$ towards the Mercator mapping of a spherical zone into a plane. The problem of periodicity of patterns of the spherical zone (due to multiple revolutions) can be explained using the proposed theory as a solution of an IVP. The basis is the coordinate system of metrical Mercator spherical coordinates $P(r, \bar{y}, \bar{z})$, which was introduced by the author. With respect to this system a point P in R^3 is an intersection of three biharmonic surfaces. The metrical quantity \bar{z} with the dimension $[m]$ is directly proportional to the minimum of the main curvature radius of the biharmonic surfaces $\bar{z} = const.$ (surface of revolution). Choosing the simplest possible hypothesis $r = ct$ and introducing it into the coordinate system of metrical Mercator spherical coordinates results in a relation with kinematics. The contribution contains three examples.

1 Grundlagen

Grundlage zum tieferen Verständnis der geometrischen Lösung der Mercator-Projektion (Mittermayer 2001) als Lösung einer Anfangswertaufgabe (AWA) (Kinematik) ist das vom Autor eingeführte Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$, siehe im Skript »Die Kugel« (Mittermayer 1998 S. 111 ff.)

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ r \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ r \tanh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \end{pmatrix} = r \vec{e}_1. \quad (1)$$

In diesem Koordinatensystem ist der Punkt P im R^3 der geometrische Ort dreier biharmonischer Flächen

$$r = const. [m] \text{ (Kugel)} \quad (2)$$

$$\bar{y} = r \cdot l = const. [m] \quad (3)$$

$$\bar{z} = r \cdot q = const. [m] \quad (4)$$

mit der Mercator-Länge l (geografische Länge λ)

$$l = \lambda = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \quad (5)$$

und der Mercator-Breite q

$$q = \operatorname{artanh}(\sin \phi) = \operatorname{artanh}\left(\frac{z}{r}\right). \quad (6)$$

Die Ortsfunktionen

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (7)$$

$$\bar{y}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \left[\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi \right] \quad (8)$$

$$\bar{z}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \operatorname{artanh}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (9)$$

erfüllen die biharmonische Differentialgleichung

$$\Delta^2 F(x, y, z) = 0 \quad (10)$$

mit dem Operator

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \left[\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right]. \quad (11)$$

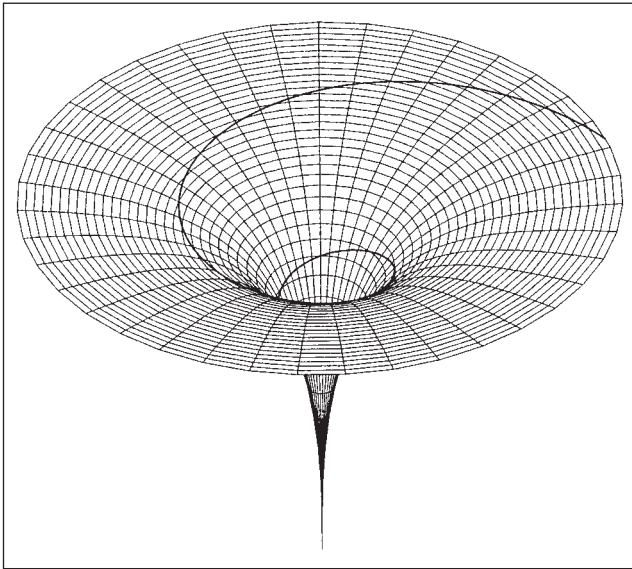


Abb. 1: Die biharmonische Fläche $\bar{z}=5$

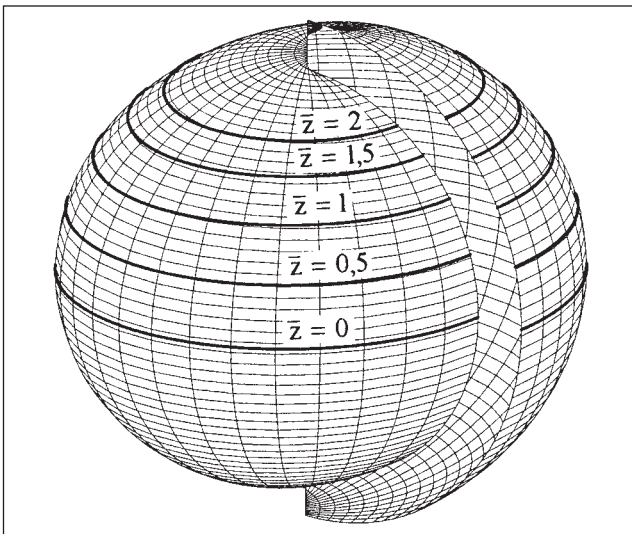


Abb. 2: Die biharmonische Fläche $\bar{y}=50$ in $8\pi \leq \lambda \leq 10\pi$

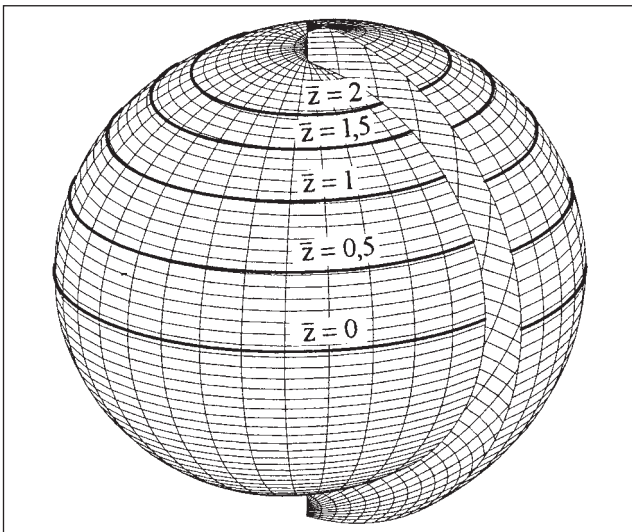


Abb. 3: Die biharmonische Fläche $\bar{y}=50$ in $10\pi \leq \lambda \leq 12\pi$

Darüber hinaus erkennen wir in diesem Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten zwei weitere Flächen, nämlich die Kegelfläche

$$q = \frac{\bar{z}}{r} = \text{const.} \tag{12}$$

und die Meridianebene

$$l = \lambda = \frac{\bar{y}}{r} = \text{const.} \tag{13}$$

Die Ortsfunktionen dieser Flächen (12) und (13) erfüllen die Laplace-Gleichung

$$\Delta q = 0, \quad \Delta l = 0 \tag{14}$$

mit dem Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{15}$$

Im Weiteren ergeben sich als Schnitt jeweils zweier biharmonischer Flächen insgesamt drei Parameterlinien, nämlich

die r -Linie ($\bar{y} = \text{const.}, \bar{z} = \text{const.}$) (Spirale),
 die \bar{y} -Linie ($r = \text{const.}, \bar{z} = \text{const.}$) (Parallelkreis),
 und die \bar{z} -Linie ($r = \text{const.}, \bar{y} = \text{const.}$) (Meridian).

Von diesen Parameterlinien ist die r -Linie von besonderem Interesse.

Als Beispiel zeigt die Abb. 1 die biharmonische Fläche $\bar{z} = 5$ (Drehfläche)

$$\vec{X}(r, \lambda) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \lambda / \cosh\left(\frac{5}{r}\right) \\ r \sin \lambda / \cosh\left(\frac{5}{r}\right) \\ r \tanh\left(\frac{5}{r}\right) \end{pmatrix} \tag{16}$$

sowie die Flächenkurve $\bar{y} = 50$, dargestellt durch den Ortsvektor (16) mit

$$\lambda = \frac{\bar{y}}{r} = \frac{50}{r} \tag{17}$$

also

$$\vec{X}(r) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos\left(\frac{50}{r}\right) / \cosh\left(\frac{5}{r}\right) \\ r \sin\left(\frac{50}{r}\right) / \cosh\left(\frac{5}{r}\right) \\ r \tanh\left(\frac{5}{r}\right) \end{pmatrix} \tag{18}$$

In den Abbildungen 2 und 3 sind Teilflächen der biharmonischen Fläche $\bar{y} = 50$ dargestellt und zwar in der Abb. 2 in $8\pi \leq \lambda \leq 10\pi$ sowie in der Abb. 3 Anschluss in $10\pi \leq \lambda \leq 12\pi$. Im Weiteren sind in der biharmonischen Fläche $\bar{y} = 50$ die Flächenkurven $\bar{z} = 0, \bar{z} = 0.5, \bar{z} = 1.0, \bar{z} = 1.5$ und $\bar{z} = 2.0$ dargestellt.

Die Abb. 4 zeigt die in der biharmonischen Fläche $\bar{y} = 50$ liegende ebene Flächenkurve $\bar{z} = 0$, Schnitt der biharmonischen Fläche $\bar{y} = 50$ mit der Äquatorebene

$$x = r \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right), \quad y = r \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right). \quad (19)$$

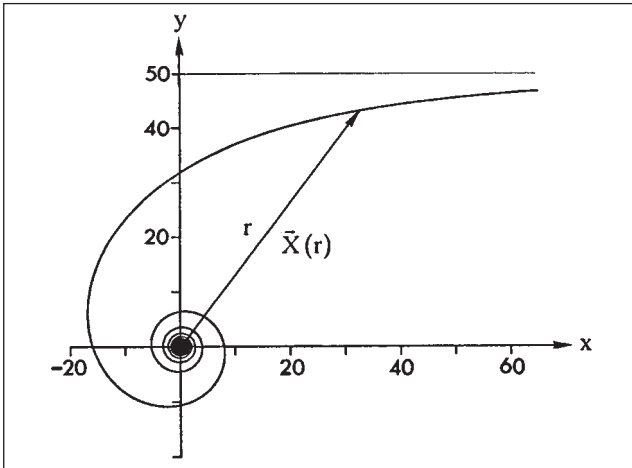


Abb. 4: Die Flächenkurve ($\bar{y}=50, \bar{z}=0$)

Die Abb. 5 zeigt die r -Linie ($\bar{y} = 50, \bar{z} = 5$) (Spirale) mit dem Ortsvektor (18), den Schnitt der beiden biharmonischen Flächen $\bar{y} = 50$ und $\bar{z} = 5$. Allgemeine Formeln zur Krümmung und Windung der r -Linie ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$) siehe (Mittermayer 1998 S. 404–423).

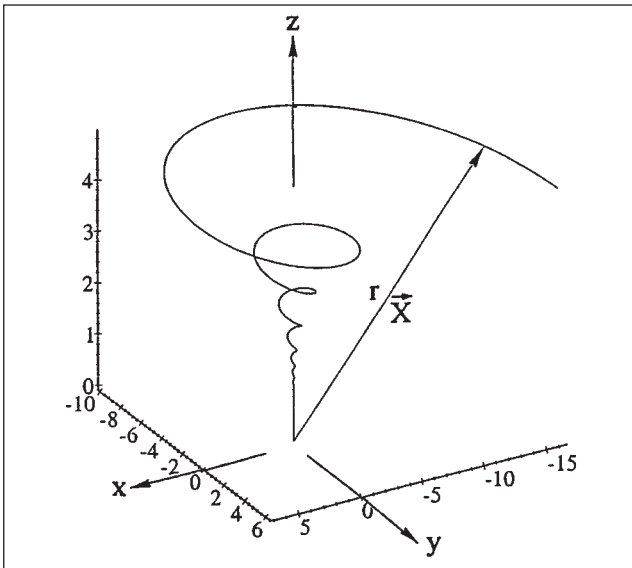


Abb. 5: Die r -Linie ($\bar{y}=50, \bar{z}=5$)

Umfassende differentialgeometrische und funktionentheoretische Betrachtungen zu den entdeckten biharmonischen Flächen $\bar{y} = const.$ und $\bar{z} = const.$ siehe in sechs Beiträgen (Mittermayer 1999a, 1999b, 1999c, 1999d, 2000a, 2000b).

In schlichter zweidimensionaler Betrachtung im Sinne von C.F. Gauß (1777–1855) sind \bar{y}, \bar{z} metrische isotherme Flächenparameter mit der Dimension [m], nämlich die Mercator-Koordinaten eines Punktes $P(\bar{y}, \bar{z})$ auf der Erd-

kugel $r = R$ (Lagekoordinaten). Hierbei ist \bar{y} [m] die Bogenlänge auf dem Äquator. Eine geometrische Deutung von \bar{z} mit der Dimension [m] fehlte bislang in der mathematischen Geodäsie. Das Problem ist gelöst, siehe Formel (67). In dreidimensionaler Betrachtung erkennen wir den Punkt $P(\bar{y}, \bar{z})$ der Erdkugel als Durchstoßpunkt der r -Linie ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$) mit der Erdkugel.

2 Die Anfangswertaufgabe (Kinematik)

2.1 Die Bahnkurve

Die im Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$ auftretende r -Linie ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$) (Raumkurve), dargestellt durch den Ortsvektor (1), kann als Bahnkurve gedeutet werden; d.h. es existiert eine Verbindung zur Kinematik. Mit der Wahl des einfachsten Ansatzes

$$r = c t \quad (20)$$

erhalten wir nunmehr eine Schar von Bahnkurven ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$), dargestellt durch Ortsvektoren als Funktion der Zeit t

$$\vec{X}(t; \bar{y}, \bar{z}) = \begin{pmatrix} x(t; \bar{y}, \bar{z}) \\ y(t; \bar{y}, \bar{z}) \\ z(t; \bar{y}, \bar{z}) \end{pmatrix} \quad (21)$$

mit

$$\begin{aligned} x(t; \bar{y}, \bar{z}) &= r \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ y(t; \bar{y}, \bar{z}) &= r \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) / \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\ z(t; \bar{y}, \bar{z}) &= r \tanh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

und $r = ct$. Aus (20) folgt die konstante Radialgeschwindigkeit c

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = c \left[\frac{m}{sec} \right], \quad (23)$$

d.h. die Punkte P durchlaufen die Bahnkurven mit konstanter Radialgeschwindigkeit. Als Beispiel zeigt die Abb. 6 die Bahnkurve

$$\begin{aligned} \bar{y} &= 25\,000\,000 \text{ m} \\ \bar{z} &= 5\,000\,000 \text{ m} \end{aligned} \quad (24)$$

mit der Radialgeschwindigkeit

$$c = 6\,378\,000 \frac{m}{sec}. \quad (25)$$

Die Einheit in der Abb. 6 ist gleich 10^6 m .

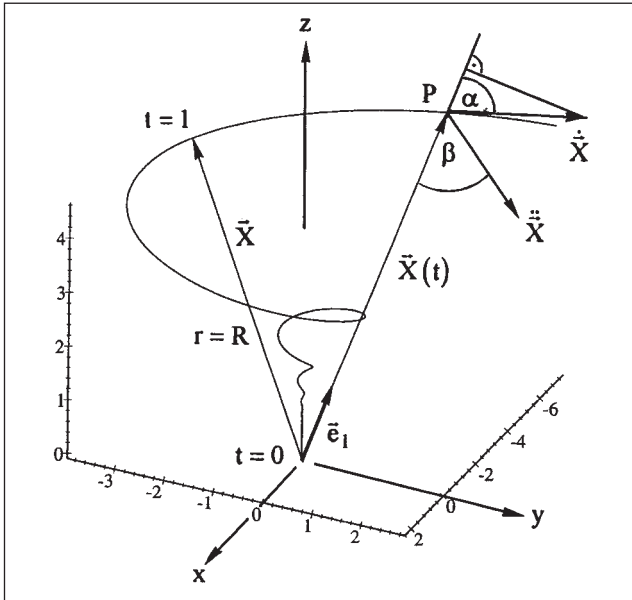


Abb. 6: Die Bahnkurve

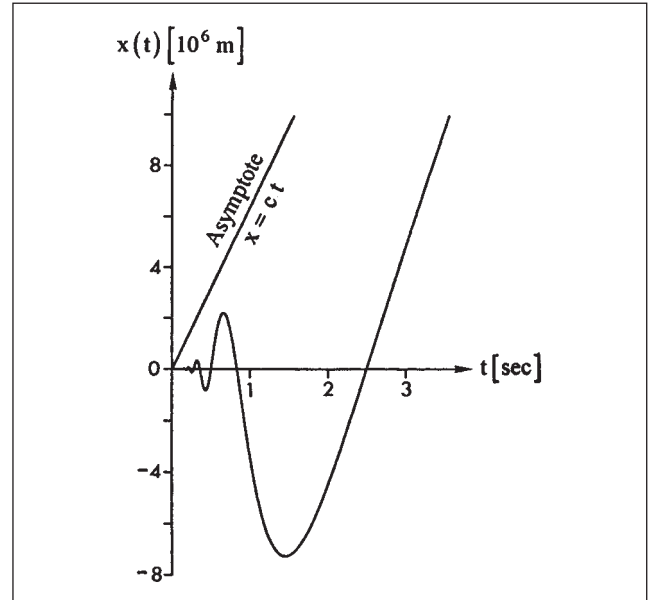


Abb. 7: Die Komponente x(t)

Wir erkennen, dass der Punkt P zur Zeit $t = t_0 = 0$ im Ursprung des Koordinatensystems startet und genau nach einer Sekunde, der Anfangszeit $t = t_1 = 1 \text{ sec}$, die Erdkugel durchstößt, denn es gilt mit (20) und der Radialgeschwindigkeit c (25)

$$r = ct_1 = R = 6\,378\,000 \text{ m} . \tag{26}$$

Wir erhalten diesen Durchstoßpunkt $P(x, y, z)$ zur Zeit $t_1 = 1 \text{ sec}$ aus dem Ortsvektor (1), angegeben mit einer Genauigkeit von 10^{-9} m

$$\begin{aligned} x &= -3\,432\,642.254\,725\,870 \text{ m} \\ y &= -3\,383\,112.888\,167\,921 \text{ m} \\ z &= 4\,177\,367.393\,105\,686 \text{ m} \end{aligned} \tag{27}$$

mit

$$r = ct_1 = |\vec{X}(t_1)| = 6\,378\,000.000\,000\,000 \text{ m} .$$

Die Abbildungen 7 bis 9 zeigen die Komponenten des Ortsvektors der betrachteten Bahnkurve (24) mit (25) als Funktion der Zeit.

In der Abb. 7 erkennen wir ein asymptotisches Verhalten der Funktion $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$, nämlich die Asymptote

$$x = ct . \tag{28}$$

Zum Grenzwertverhalten der Funktionen $y(t)$ und $z(t)$ für $t \rightarrow \infty$ siehe in diesem Beitrag Formeln (53) bis (55).

2.2 Die Bahngeschwindigkeit

Mit der Vektordarstellung der Bahnkurve ($\bar{y} = \text{const.}$, $\bar{z} = \text{const.}$) (21) ist der auftretende Geschwindigkeitsvektor als zeitliche Änderung des Ortsvektors definiert

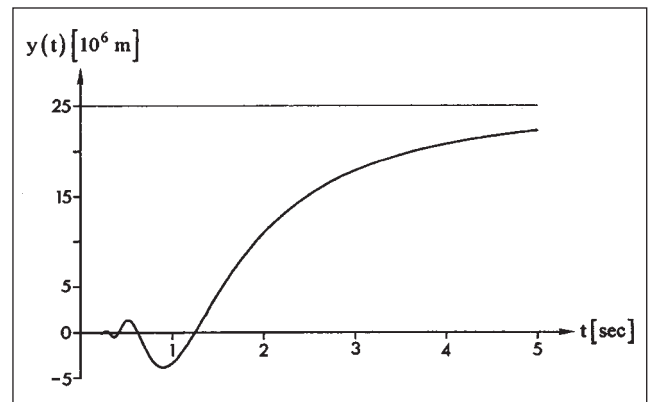


Abb. 8: Die Komponente y(t)

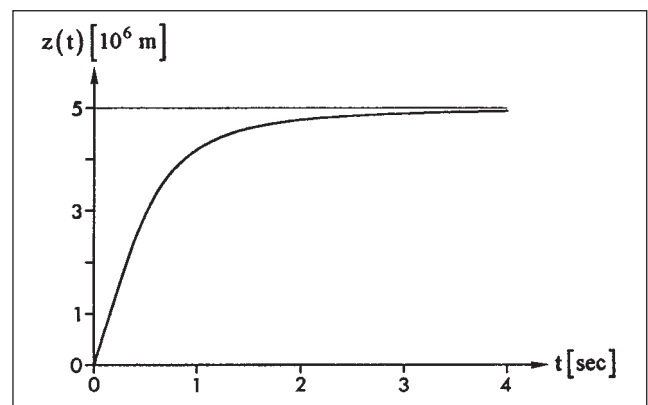


Abb. 9: Die Komponente z(t)

$$\dot{\vec{X}} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \frac{dr}{dt} = c \frac{\partial \vec{X}}{\partial r} \tag{29}$$

mit dem Ergebnis

$$\dot{\vec{X}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \frac{c}{\cosh^2\left(\frac{\bar{z}}{r}\right)} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \end{pmatrix} \tag{30}$$

und

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= \frac{\bar{y}}{r} \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) + \\
 &+ \frac{\bar{z}}{r} \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \sinh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) + \\
 &+ \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\
 f_{12} &= -\frac{\bar{y}}{r} \cos\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) + \\
 &+ \frac{\bar{z}}{r} \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \sinh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) + \\
 &+ \sin\left(\frac{\bar{y}}{r}\right) \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \\
 f_{13} &= -\frac{\bar{z}}{r} + \sinh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right)
 \end{aligned} \tag{31}$$

sowie $r = ct$. Wir erhalten die Bahngeschwindigkeit

$$v(t) = |\dot{\vec{X}}| = c \sqrt{1 + \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{c^2 t^2 \cosh^2\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right)}} \left[\frac{m}{sec} \right] \tag{32}$$

mit den Grenzwerten bezüglich beliebiger Bahnkurven ($\bar{y} = const., \bar{z} = const. \neq 0$)

$$\lim_{t \rightarrow 0} v(t) = c, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = c, \tag{33}$$

siehe (Mittermayer 1998 S. 341 ff.).

Die auftretende Radialgeschwindigkeit v_r folgt aus dem Skalarprodukt des Geschwindigkeitsvektors (30) mit dem Einheitsvektor \vec{e}_1 aus (1) und (20) als Funktion der Zeit

$$\vec{e}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\bar{y}}{ct}\right) / \cosh\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right) \\ \sin\left(\frac{\bar{y}}{ct}\right) / \cosh\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right) \\ \tanh\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right) \end{pmatrix} \tag{34}$$

mit dem erwarteten Ergebnis konstanter Radialgeschwindigkeit

$$v_r = \langle \dot{\vec{X}}, \vec{e}_1 \rangle = c. \tag{35}$$

Die maximale Bahngeschwindigkeit erfolgt zur Zeit

$$\bar{t}_1 = \frac{|\bar{z}|}{cq_1} [sec] \tag{36}$$

mit der Mercator-Breite q_1 , angegeben mit einer Genauigkeit von 10^{-30}

$$q_1 = 1.19967\ 86402\ 57733\ 83391\ 63698\ 48641, \tag{37}$$

siehe (Mittermayer 1998 S. 347–348).

Die Tab. 1 enthält die Bahngeschwindigkeit zur Anfangszeit $t = t_1 = 1\ sec$, ferner die maximale Bahngeschwindigkeit zum Zeitpunkt (36)

$$\bar{t}_1 = \frac{|\bar{z}|}{cq_1} = 0.65346\ 23389\ 78492\ 238\ sec \tag{38}$$

sowie die Bahngeschwindigkeiten zu differentiell benachbarten Zeitpunkten

$$t = \bar{t}_1 \pm 10^{-12} [sec]. \tag{39}$$

$t [sec]$	$v(t) \left[\frac{m}{sec} \right]$
1	20 293 899.391 688 258 512 210 99
$\bar{t}_1 - 1 \cdot 10^{-12}$	22 477 315.202 477 347 830 823 33
\bar{t}_1	22 477 315.202 477 347 830 823 36
$\bar{t}_1 + 1 \cdot 10^{-12}$	22 477 315.202 477 347 830 823 33

Tab. 1: Die maximale Bahngeschwindigkeit

Die zeitliche Änderung $\Delta t = \pm 10^{-12}\ sec$ entspricht mit c (25) einer radialen Änderung von

$$\Delta r = c \cdot \Delta t = \pm 0.000\ 006\ 378\ m. \tag{40}$$

Aus (21) folgt mit (36) der geometrische Ort $P(x, y, z)$ maximaler Bahngeschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 x(\bar{t}_1) &= 2\ 209\ 683.935\ 340\ 241\ m \\
 y(\bar{t}_1) &= -646\ 884.702\ 568\ 864\ m \\
 z(\bar{t}_1) &= 3\ 474\ 082.690\ 268\ 983\ m
 \end{aligned} \tag{41}$$

mit dem radialen Abstand

$$r = c\bar{t}_1 = |\vec{X}(\bar{t}_1)| = 4\ 167\ 782.798\ 004\ 823\ m.$$

Zur maximalen Bahngeschwindigkeit erhält man bezüglich beliebiger Bahnkurven ($\bar{y} = const., \bar{z} = const. \neq 0$) aus (32) mit der Mercator-Breite q_1 (37) folgende einfache Formel

$$v_{max} = c \sqrt{q_1^2 + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right)^2 (q_1^2 - 1)} \left[\frac{m}{sec} \right], \tag{42}$$

siehe (Mittermayer 1998 S. 349).

Betrachtet man den auftretenden Winkel α zwischen dem Geschwindigkeitsvektor (30) und dem Einheitsvektor (34), so folgt mit dem Skalarprodukt (35) die Formel

$$\cos \alpha(t) = \left[1 + \frac{\bar{y}^2 + \bar{z}^2}{c^2 t^2 \cosh^2\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{43}$$

Aufgrund des Skalarproduktes (35) werden die Bahngeschwindigkeit v (32) und der Winkel α (43) zum gleichen

Zeitpunkt $t = \bar{t}_1$ (36) maximal. Die Tab. 2 enthält den Winkel α zur Anfangszeit $t = t_1 = 1 \text{ sec}$ sowie den auftretenden maximalen Winkel α_{max} zum Zeitpunkt \bar{t}_1 (36), ferner die Winkel α zu den differentiell benachbarten Zeitpunkten (39).

$t \text{ [sec]}$	$\alpha(t)$
1	71° 40' 57''1707 7321 5475 1943 207
$\bar{t}_1 - 1 \cdot 10^{-12}$	73° 30' 56''4880 5473 7319 9211 083
\bar{t}_1	73° 30' 56''4880 5473 7319 9211 084
$\bar{t}_1 + 1 \cdot 10^{-12}$	73° 30' 56''4880 5473 7319 9211 083

Tab. 2: Der Winkel $\alpha(t)$

Für den maximalen Winkel α_{max} in Abhängigkeit von \bar{y} und $\bar{z} \neq 0$ gilt die einfache Formel

$$\cos \alpha_{max}(\bar{y}, \bar{z}) = \left[q_1^2 + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right)^2 (q_1^2 - 1) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (44)$$

unabhängig von c ; siehe (Mittermayer 1998 S. 351).

Die geografische Länge λ und die geografische Breite ϕ bezüglich des Ortsvektors (21) beliebiger Bahnkurven ($\bar{y} = \text{const.}, \bar{z} = \text{const.}$) sind ebenso Funktionen der Zeit

$$\lambda(t) = \frac{\bar{y}}{ct} \quad (45)$$

und

$$\phi(t) = \arcsin \left[\tanh \left(\frac{\bar{z}}{ct} \right) \right] \quad (46)$$

bzw. die Poldistanz ϑ

$$\vartheta(t) = \arccos \left[\tanh \left(\frac{\bar{z}}{ct} \right) \right]. \quad (47)$$

Bezüglich der Bahnkurve (24) folgt zur Anfangszeit $t = 1 \text{ sec}$ die Richtung (λ, ϕ)

$$\begin{matrix} \lambda = & 224^\circ & 35' & 1''1220 & 0963 \\ \phi = & 40^\circ & 55' & 1''2127 & 0985 \end{matrix} \quad (48)$$

Zur Theorie der Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen der geografischen Länge (45) und geografischen Breite (46) siehe (Mittermayer 1999e).

Zum auftretenden Beschleunigungsvektor als zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors (30) (Abb. 6)

$$\ddot{\vec{X}} = \frac{\partial \dot{\vec{X}}}{\partial r} \frac{dr}{dt} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial r^2} \quad (49)$$

siehe im Skript »Die Kugel« (Mittermayer 1998 S. 358-390 und S. 428-444).

Im Hinblick auf die Mercator-Projektion als geometrisch-kinematische Lösung einer Anfangswertaufgabe ist die folgende Abb. 10 von besonderem Interesse.

Diese Abbildung zeigt in $t = [0, \infty]$ die Projektion der Bahnkurve (24) mit der Radialgeschwindigkeit (25) in die (y, z) -Ebene. Wir sehen zur Zeit $t = 1 \text{ sec}$ (Anfangszeit) die Projektion P' des Durchstoßpunktes P der Bahnkurve ($\bar{y} = \text{const.}, \bar{z} = \text{const.}$) (24) mit der Erdkugel (26), im

Weiteren die Projektion $\dot{\vec{X}}'$ des zugehörigen Geschwindigkeitsvektors (30) mit seinem Betrag

$$v'(t) = |\dot{\vec{X}}'| = \sqrt{y'^2 + z'^2} = c \frac{\sqrt{f_{12}^2 + f_{13}^2}}{\cosh^2 \left(\frac{\bar{z}}{ct} \right)} \quad (50)$$

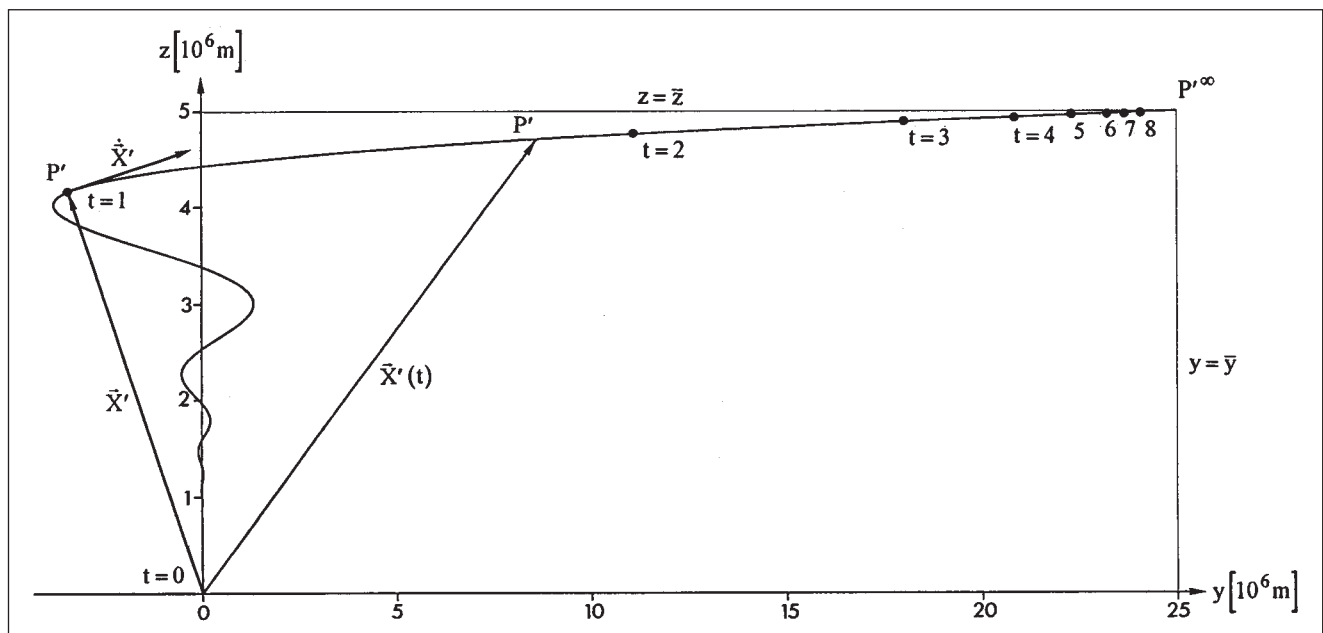


Abb. 10: Die Projektion der Bahnkurve in die (y, z) -Ebene

und den Grenzwerten

$$\lim_{t \rightarrow 0} v'(t) = c, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v'(t) = 0. \quad (51)$$

Dies ist eine klassische Anfangswertaufgabe in der Kinematik mit ihrer exakten Lösung aus (22)

$$\vec{X}'(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \sin\left(\frac{\bar{y}}{ct}\right) / \cosh\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right) \\ ct \tanh\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right) \end{pmatrix}. \quad (52)$$

Die Lösungen der Anfangswertaufgabe zu den Zeitpunkten $t = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \text{ sec}$ sind in der Abb. 10 besonders hervorgehoben. Wir erkennen eine Punktfolge, die mit $t \rightarrow \infty$ gegen den Punkt P'^{∞} strebt

$$P'^{\infty}: \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \bar{z}, \quad (53)$$

ein Punkt, dem man sich beliebig genau nähert, jedoch nie exakt erreicht. Diesen Punkt (53) bezeichnen wir als Abbild des Punktes $P(\bar{y}, \bar{z})$ der Erdkugel $r = R$ in die Ebene, ein Punkt der Mercator-Karte. Dieses Ergebnis (53) folgt unter Beachtung der Regel von l'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\bar{y}}{ct}\right)}{\left(\frac{1}{ct}\right)} \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\cosh\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right)} = \bar{y} \quad (54)$$

und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tanh\left(\frac{\bar{z}}{ct}\right)}{\left(\frac{1}{ct}\right)} = \bar{z}. \quad (55)$$

In der Sprache der Mathematiker sagt man z.B: Es existiert ein Zeitpunkt $t = \hat{t}$ derart, dass für alle Zeitpunkte $t > \hat{t}$

$$|y(t) - \bar{y}| < \epsilon \quad (56)$$

gilt, wobei $\epsilon > 0$ mit der Dimension $[m]$ beliebig klein ist. Der Zeitpunkt \hat{t} ist abhängig von ϵ und im Weiteren von (\bar{y}, \bar{z}) sowie der Radialgeschwindigkeit c bezüglich einer betrachteten Bahnkurve ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$).

2.3 Der Hauptkrümmungshalbmesser R_1 der biharmonischen Fläche $\bar{z} = const.$

Mit der Bewegung des Punktes P in der biharmonischen Fläche $\bar{z} = const.$ längs der Bahnkurve ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$) (Abb. 1) erkennen wir den Hauptkrümmungshalbmesser $R_1 > 0$ als Funktion der Zeit. Es gilt die Formel

$$R_1(t) = \frac{\left[\left(\frac{\bar{z}}{r}\right)^2 + \cosh^2\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \right]^{3/2} |\bar{z}|}{\left(\frac{\bar{z}}{r}\right)^3 \left[\frac{\bar{z}}{r} + \sinh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \cosh\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) \right]} \quad [m] \quad (57)$$

mit $r = ct$, (Mittermayer 1999a S. 185); siehe Abb. 11 zu dem betrachteten Beispiel.

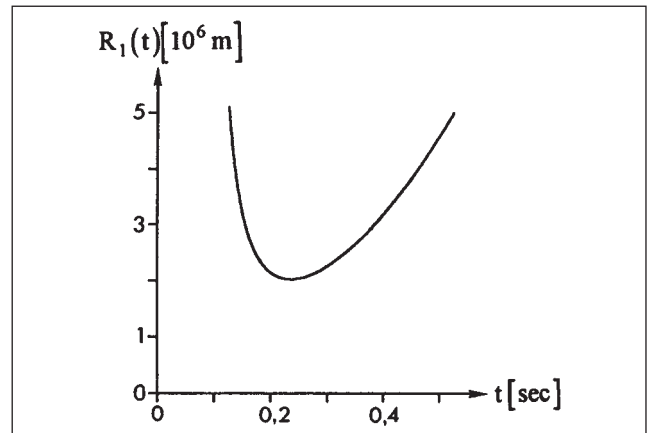


Abb. 11: Der Hauptkrümmungshalbmesser $R_1(t)$

Zum Zeitpunkt $t = 1 \text{ sec}$, also im Durchstoßpunkt der Bahnkurve (24) mit der Erdkugel, erhalten wir den Hauptkrümmungshalbmesser

$$R_1(1) = 19\,557\,545.634\,916\,377 \text{ m}.$$

Zu welchem Zeitpunkt $t = \bar{t}_2$ wird der Hauptkrümmungshalbmesser minimal?

Aus der Forderung

$$\dot{R}_1(t) = \frac{\partial R_1}{\partial r} \frac{dr}{dt} = c \frac{\partial R_1}{\partial r} = 0 \quad (58)$$

folgt eine Gleichung

$$F\left(\frac{\bar{z}}{r}\right) = 0 \quad (59)$$

und im Weiteren mit der Beziehung (12) die Bestimmungsgleichung für die Mercator-Breite q

$$F(q) = q \left(11 + 4q^2 - \cosh 2q \right) + 3 \tanh q \left(1 - 2q^2 + \cosh 2q \right) = 0; \quad (60)$$

siehe Abb. 12.

Durch Newton-Iteration erhalten wir die Nullstellen dieser Gleichung (60), angegeben mit einer Genauigkeit von 10^{-30}

$$q_2 = \pm 3.30932\,88627\,38092\,46701\,02904\,19734. \quad (61)$$

Als allgemeine Lösung dieser Extremalaufgabe bezüglich beliebiger biharmonischer Flächen $\bar{z} = const. \neq 0$ erhalten wir als geometrischen Ort einen Doppelkegel (61); d.h. die Extremalstellen liegen auf Parallelkreisen, dem Schnitt der biharmonischen Flächen $\bar{z} = const. \neq 0$ mit dem Doppelkegel (61). Der Öffnungswinkel dieses Kegels

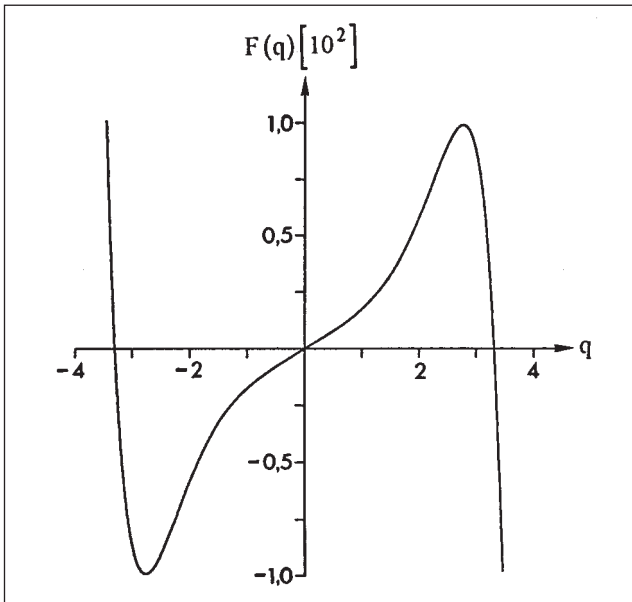


Abb. 12: Die Funktion $F(q)$

ist gleich der doppelten Poldistanz ϑ (47). Wir erhalten mit $q_2 > 0$ den Öffnungswinkel

$$\psi_2 = 2 \arccos(\tanh q_2), \tag{62}$$

angegeben mit einer Genauigkeit von $10^{-16}''$

$$\psi_2 = 8^\circ 22' 14''.8253\ 7615\ 5794\ 5208.$$

Aus der Beziehung

$$r = c\bar{t}_2 = \frac{\bar{z}}{q_2} \tag{63}$$

folgt der Zeitpunkt des minimalen Hauptkrümmungshalbmessers

$$\bar{t}_2 = \frac{\bar{z}}{c q_2} = 0.23688\ 93642\ 18922\ 301\ sec. \tag{64}$$

Die Tab. 3 enthält zum betrachteten Beispiel den minimalen Hauptkrümmungshalbmesser zur Zeit \bar{t}_2 (64) sowie die Hauptkrümmungshalbmesser zu den differentiell benachbarten Zeitpunkten

$$t = \bar{t}_2 \pm 10^{-12} [sec]. \tag{65}$$

$t [sec]$	$R_1(t) [m]$
$\bar{t}_2 - 1 \cdot 10^{-12}$	2 027 724.234 471 519 971 482 6
\bar{t}_2	2 027 724.234 471 519 971 482 5
$\bar{t}_2 + 1 \cdot 10^{-12}$	2 027 724.234 471 519 971 482 6

Tab. 3: Der Hauptkrümmungshalbmesser R_1

Zur betrachteten Bahnkurve (24) folgt aus (21) zum Zeitpunkt (64) der geometrische Ort $P(x, y, z)$ des minimalen Hauptkrümmungshalbmessers

$$\begin{aligned} x(\bar{t}_2) &= -73\ 709.353\ 565\ 062\ m \\ y(\bar{t}_2) &= -82\ 014.637\ 918\ 342\ m \\ z(\bar{t}_2) &= 1\ 506\ 851.023\ 715\ 112\ m \end{aligned} \tag{66}$$

mit dem radialen Abstand

$$r = c\bar{t}_2 = |\vec{X}(\bar{t}_2)| = 1\ 510\ 880.364\ 988\ 286\ m.$$

Zum minimalen Hauptkrümmungshalbmesser erhält man aus der Formel (57) mit der Beziehung (12) und der Mercator-Breite $q_2 > 0$ (61) folgende einfache Formel

$$R_1^{min} = k_2 |\bar{z}| [m], \tag{67}$$

eine lineare Beziehung mit

$$k_2 = \frac{[q_2^2 + \cosh^2 q_2]^{3/2}}{q_2^3 [q_2 + \sinh q_2 \cosh q_2]} \tag{68}$$

und dem Ergebnis

$$k_2 = 0.40554\ 48468\ 94303\ 99429\ 65053\ 09315. \tag{69}$$

Mit der Formel (67) ist die elementare geometrische Deutung zur metrischen Größe \bar{z} mit der Dimension $[m]$ gelungen. Es folgen drei allgemeine Beispiele zur Mercator-Projektion als Lösung einer AWA.

1. Beispiel:

Wir betrachten im Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$ auf der Erdkugel mit dem Radius

$$r = R = 6\ 378\ 000\ m \tag{70}$$

ein Gebiet G , definiert durch

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} R &\leq \bar{y} \leq \frac{\pi}{2} R \\ -\frac{\pi}{2} R &\leq \bar{z} \leq \frac{\pi}{2} R \end{aligned}, \tag{71}$$

Kugelzone einer Halbkugel. Dieses Gebiet G (71) wird begrenzt durch zwei Parallelkreise

$$r = R; \quad \bar{z} = \pm \frac{\pi}{2} R, \quad |\bar{y}| \leq \frac{\pi}{2} R \tag{72}$$

und zwei Meridiane

$$r = R; \quad \bar{y} = \pm \frac{\pi}{2} R, \quad |\bar{z}| \leq \frac{\pi}{2} R, \tag{73}$$

der Rand des Gebietes G .

Der minimale Parallelhalbmesser p folgt mit (72) aus

$$p = \frac{R}{\cosh(\bar{z}/R)} = \frac{R}{\cosh(\frac{\pi}{2})} = 2\ 541\ 867.808\ m \tag{74}$$

mit der zugehörigen geografischen Breite

$$\phi = \pm \arcsin \left(\tanh \frac{\pi}{2} \right) = \pm 66^\circ 30' 47''{7376} . \quad (75)$$

Die Punkte $P(R, \bar{y}, \bar{z})$ des Gebietes G , einschließlich seines Randes, erkennen wir als Durchstoßpunkte der Bahnkurven (Raumkurven) ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$) mit der Erdkugel $r = R$ (70). Mit der gewählten Radialgeschwindigkeit

$$\dot{r} = c = 6\,378\,000 \frac{m}{sec} \quad (76)$$

erfolgt der Durchstoß zur Zeit $t = 1 \text{ sec}$. Die jeweilige Bahngeschwindigkeit der Punkte folgt aus (32). Die Abb. 13 zeigt die Projektion P' des Gebietes G (71) in die (y, z) -Ebene zur Zeit $t = 1 \text{ sec}$, dargestellt durch 9 Parallelkreise

$$\bar{z}_j = -\frac{\pi}{2}R + j\frac{\pi}{8}R, \quad |\bar{y}| \leq \frac{\pi}{2}R \quad \text{für } j = 0(1)8$$

und 9 Meridiane

$$\bar{y}_j = -\frac{\pi}{2}R + j\frac{\pi}{8}R, \quad |\bar{z}| \leq \frac{\pi}{2}R \quad \text{für } j = 0(1)8,$$

Formeln (52). Dies ist das Anfangsbild zur Zeit $t = 1 \text{ sec}$. Die Einheit in den Abbildungen 13 bis 16 ist gleich 10^6 m .

Zu den Zeitpunkten z.B. $t = 2, 3, 4, 5, \dots [\text{sec}]$ erhalten wir als Lösungen der AWA eine Bildfolge, die für $t \rightarrow \infty$ gegen ein äquidistantes Gitternetz strebt, die Mercator-Abbildung des auf der Erdkugel definierten Gebietes G (71). Die Abb. 14 zeigt die Lösung der AWA zur Zeit $t = 2 \text{ sec}$, die Abb. 15 zur Zeit $t = 100 \text{ sec}$.

In den Abbildungen 13 bis 15 sind 4 Projektionen P'_i in der (y, z) -Ebene besonders hervorgehoben. Hierzu gehören die Bahnkurven ($\bar{y} = const., \bar{z} = const.$)

$$\begin{aligned} P'_1 : \quad \bar{y}_1 &= -\frac{\pi}{2}R, & \bar{z}_1 &= -\frac{\pi}{2}R \\ P'_2 : \quad \bar{y}_2 &= \frac{\pi}{2}R, & \bar{z}_2 &= -\frac{\pi}{2}R \\ P'_3 : \quad \bar{y}_3 &= \frac{\pi}{2}R, & \bar{z}_3 &= \frac{\pi}{2}R \\ P'_4 : \quad \bar{y}_4 &= -\frac{\pi}{2}R, & \bar{z}_4 &= \frac{\pi}{2}R \end{aligned} .$$

Die Abstände d'_{ij} der Punkte P'_i und P'_j sind Funktionen der Zeit

$$d'_{ij}(t) = \sqrt{(y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta z^2} \quad (77)$$

mit $P'_i(y_i, z_i)$ gemäß (52)

$$\begin{aligned} y_i(t) &= ct \sin \left(\frac{\bar{y}_i}{ct} \right) / \cosh \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right), \\ z_i(t) &= ct \tanh \left(\frac{\bar{z}_i}{ct} \right) \end{aligned} , \quad (78)$$

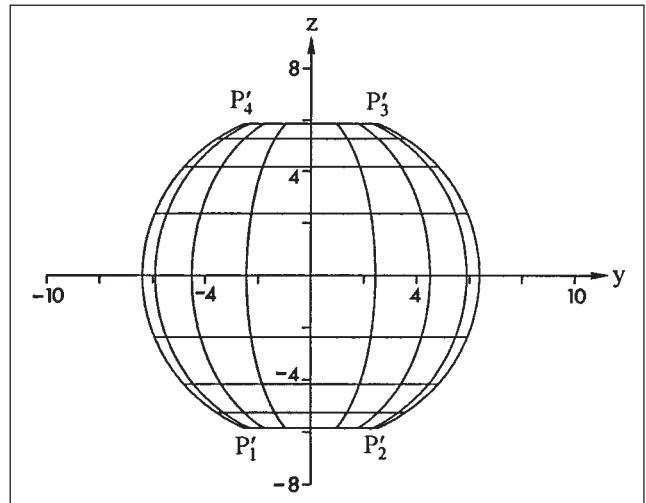


Abb. 13: Anfangsbild zur Zeit $t = 1 \text{ sec}$

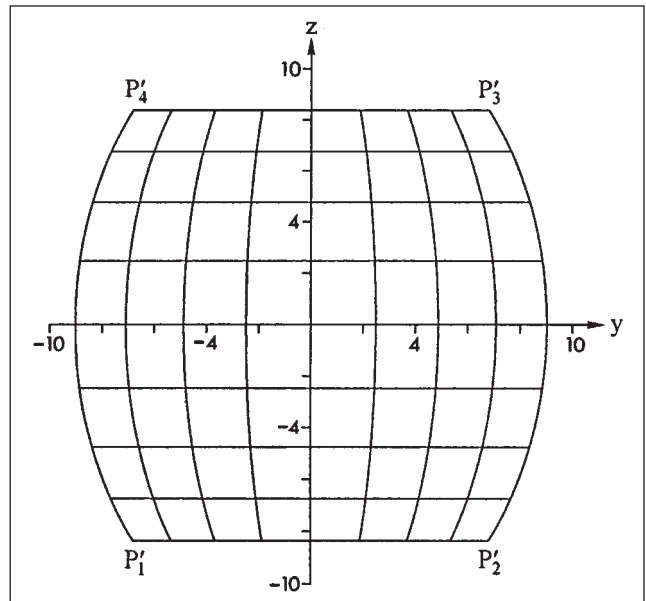


Abb. 14: Lösung der AWA zur Zeit $t = 2 \text{ sec}$

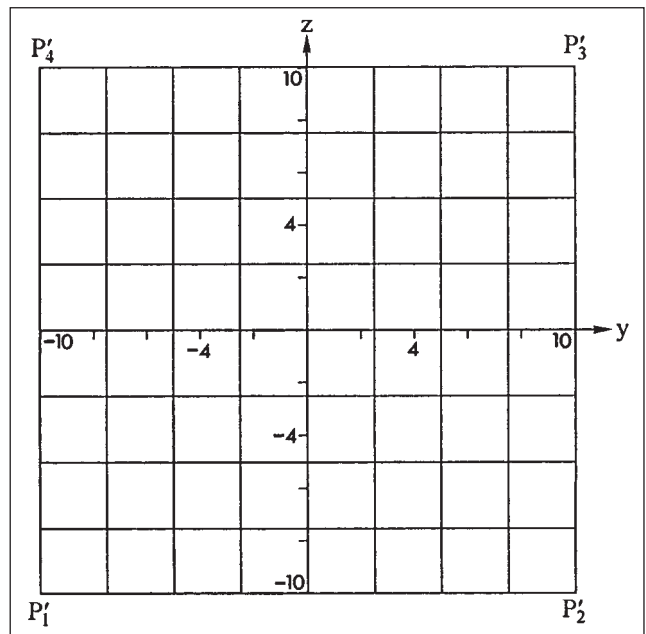


Abb. 15: Lösung der AWA zur Zeit $t = 100 \text{ sec}$

t [sec]	$d'_{12}(t)$ [m]	$d'_{23}(t)$ [m]	$d'_{13}(t)$ [m]
1	5 083 735.616 456 460	11 699 195.193 771 752	12 756 000.000 000 000
1.5	10 354 724.839 646 941	14 938 190.006 164 228	18 176 078.982 142 056
2	13 618 892.055 027 383	16 730 621.697 564 739	21 572 851.531 346 337
3	16 780 702.460 461 747	18 386 732.274 491 090	24 893 049.206 562 848
5	18 774 951.838 557 905	19 402 908.782 316 567	26 999 475.657 039 457
10^1	19 711 103.940 749 740	19 873 889.995 509 715	27 991 054.323 062 950
10^2	20 033 782.343 308 614	20 035 430.123 623 363	28 333 211.876 129 725
10^4	20 037 077.614 998 984	20 037 077.779 797 342	28 336 707.029 983 949
10^6	20 037 077.944 562 742	20 037 077.944 579 221	28 336 707.379 539 101
10^8	20 037 077.944 595 698	20 037 077.944 595 700	28 336 707.379 574 056
10^9	20 037 077.944 595 701	20 037 077.944 595 701	28 336 707.379 574 060

Tab. 4: Abstände $d'_{ij}(t)$ als Funktion der Zeit t

analog für P'_j . Mit (53) folgen die Grenzwerte der Abstände $d'_{ij}(77)$ für $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d'_{ij}(t) = d'_{ij}{}^\infty = \sqrt{(\bar{y}_j - \bar{y}_i)^2 + (\bar{z}_j - \bar{z}_i)^2}. \quad (79)$$

Zu dem betrachteten Beispiel erhalten wir folgende Ergebnisse, angegeben mit einer Genauigkeit von $10^{-9} m$

$$\begin{aligned} d'_{12}{}^\infty &= R\pi = 20\,037\,077.944\,595\,701\,m \\ d'_{23}{}^\infty &= R\pi = 20\,037\,077.944\,595\,701\,m \\ d'_{13}{}^\infty &= R\pi\sqrt{2} = 28\,336\,707.379\,574\,060\,m, \end{aligned}$$

siehe Tab. 4 für $t \geq 1 sec$.

Wir erkennen, dass zum Zeitpunkt $t = 10^9 sec$ folgende Genauigkeit erreicht wird

$$|d'_{ij}(t) - d'_{ij}{}^\infty| < 5 \cdot 10^{-10} m.$$

In einer weiteren Abb. 16 sehen wir das Anfangsbild zur Zeit $t = 1 sec$, den Rand des Gebietes (72),(73) zur Zeit $t = 100 sec$ sowie Projektionen ausgewählter Bahnkurven bezüglich des Randes des Gebietes G in $1 \leq t \leq 100 sec$.

2. Beispiel:

In diesem Beispiel betrachten wir im Koordinatensystem metrischer Mercator-Kugelkoordinaten $P(r, \bar{y}, \bar{z})$ auf der Erdkugel $r = R$ (70) eine Kugelzone G , definiert durch

$$\begin{aligned} -R\pi &\leq \bar{y} \leq R\pi \\ -R\pi &\leq \bar{z} \leq R\pi \end{aligned} \quad (80)$$

mit $\Delta\bar{y} = 2R\pi$, ein Umlauf. Dieses Gebiet G (80) wird begrenzt durch zwei Parallelkreise

$$r = R; \quad \bar{z} = \pm R\pi, \quad |\bar{y}| \leq R\pi \quad (81)$$

und zwei zusammenfallende Meridiane

$$r = R; \quad \bar{y} = \pm R\pi, \quad |\bar{z}| \leq R\pi. \quad (82)$$

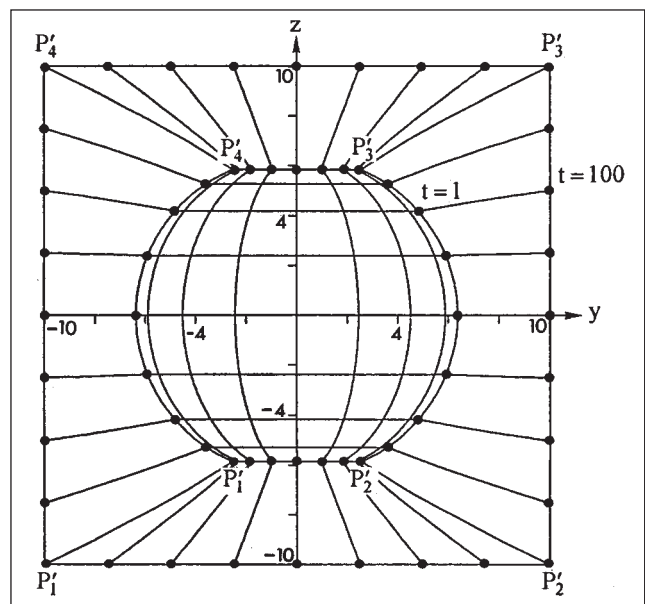


Abb. 16: Zur Lösung der AWA in $1 \leq t \leq 100 sec$

Zu diesen Meridianen (82) gehören jedoch verschiedene Bahnkurven ($\bar{y} = R\pi, \bar{z} = const.$) bzw. ($\bar{y} = -R\pi, \bar{z} = const.$). Der minimale Parallelhalbmesser in G (80) ist

$$p = \frac{R}{\cosh(\bar{z}/R)} = \frac{R}{\cosh \pi} = 550\,209.257\,m \quad (83)$$

mit der zugehörigen geografischen Breite

$$\phi = \pm \arcsin(\tanh \pi) = \pm 85^\circ 3' 4''.0636. \quad (84)$$

Mit der Radialgeschwindigkeit (76) erhalten wir zur Zeit $t = 1 sec$ als Anfangsbild keine eindeutige Projektion P' der Kugelzone (80) in die (y, z) -Ebene, dargestellt durch 17 Parallelkreise

$$\bar{z}_j = -R\pi + j\frac{\pi}{8}R, \quad |\bar{y}| \leq R\pi \quad \text{für } j = 0(1)16 \quad (85)$$

und 17 Meridiane

$$\bar{y}_j = -R\pi + j\frac{\pi}{8}R, \quad |\bar{z}| \leq R\pi \quad \text{für } j = 0(1)16, \quad (86)$$

Abb. 17. Die Einheit in den Abbildungen 17 bis 19 ist gleich $10^6 m$.

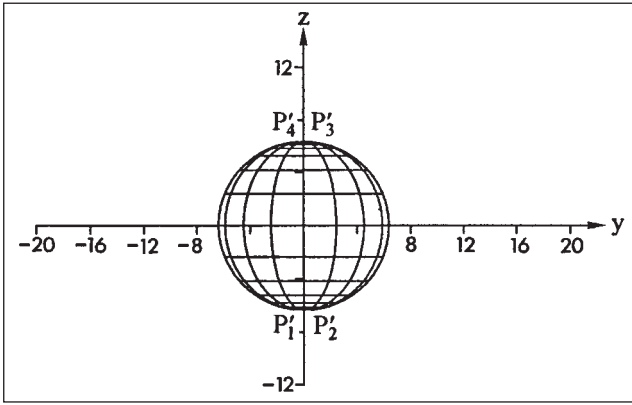


Abb. 17: Anfangsbild zur Zeit $t = 1 \text{ sec}$

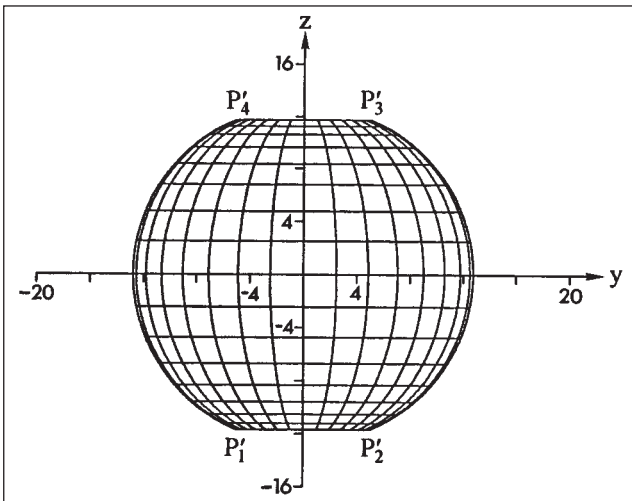


Abb. 18: Lösung der AWA zur Zeit $t = 2 \text{ sec}$

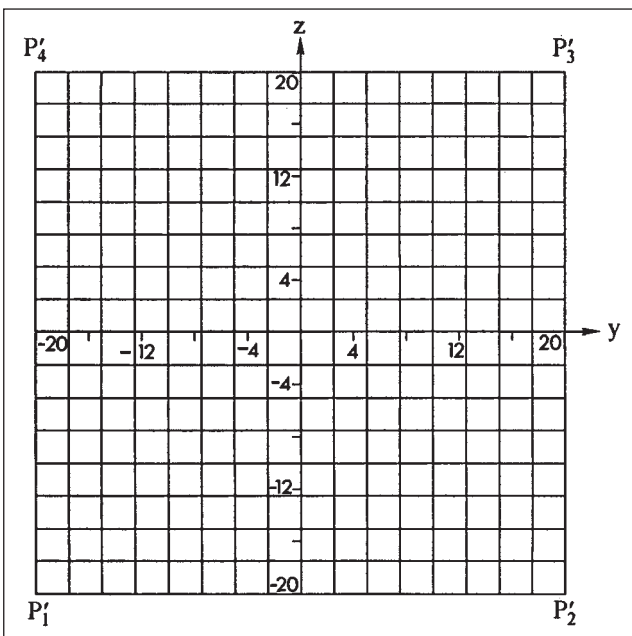


Abb. 19: Lösung der AWA zur Zeit $t = 100 \text{ sec}$

Wir erkennen bezüglich der Projektionen der Meridiane $\bar{y}_j = \text{const.}$ (86) zur Anfangszeit $t = 1 \text{ sec}$ folgende Eigenschaften:

- a) Eindeutigkeit der Meridiane $j = 4; 12;$
- b) Zweideutigkeit der Meridiane $j = 1, 7; 2, 6; 3, 5; 9, 15; 10, 14; 11, 13;$
- c) Dreideutigkeit der Meridiane $j = 0, 8, 16;$

In der Abb. 17 sind demnach 9 Projektionen sichtbar.

Die Lösung der AWA zur Zeit $t = 2 \text{ sec}$ ist eindeutig. Dies ist mit $r = ct = 2R$ und dem Definitionsbereich (80) einsichtig; siehe Abb. 18.

Die folgende Abb. 19 zeigt die Lösung der AWA zur Zeit $t = 100 \text{ sec}$.

In den Abbildungen 17 bis 19 sind 4 Projektionen P'_i in der (y, z) -Ebene besonders hervorgehoben. Hierzu gehören die Bahnkurven ($\bar{y} = \text{const.}, \bar{z} = \text{const.}$)

$$\begin{aligned}
 P'_1: & \quad \bar{y}_1 = -R\pi, \quad \bar{z}_1 = -R\pi \\
 P'_2: & \quad \bar{y}_2 = R\pi, \quad \bar{z}_2 = -R\pi \\
 P'_3: & \quad \bar{y}_3 = R\pi, \quad \bar{z}_3 = R\pi \\
 P'_4: & \quad \bar{y}_4 = -R\pi, \quad \bar{z}_4 = R\pi
 \end{aligned}$$

Bezüglich der Abstände d'_{ij} der Punkte P'_i und P'_j als Funktionen der Zeit (77) erhalten wir mit (79) folgende Grenzwerte

$$\begin{aligned}
 d'_{12}{}^\infty &= 2R\pi = 40\,074\,155.889\,191\,403 \text{ m} \\
 d'_{23}{}^\infty &= 2R\pi = 40\,074\,155.889\,191\,403 \text{ m} \\
 d'_{13}{}^\infty &= 2\sqrt{2}R\pi = 56\,673\,414.759\,148\,120 \text{ m}
 \end{aligned}$$

siehe Tab. 5 für $1 \leq t \leq 10^{10} \text{ sec}$.

Die erreichte Genauigkeit der Lösung der AWA zum Zeitpunkt $t = 10^{10} \text{ sec}$ bezogen auf die Grenzwerte beträgt

$$\left| d'_{ij}(t) - d'_{ij}{}^\infty \right| < 5 \cdot 10^{-10} \text{ m} .$$

3. Beispiel:

In dem betrachteten 2. Beispiel ist die Kugelzone bezüglich \bar{y} in $|\bar{y}| \leq R\pi$ definiert. Periodische Umläufe mit der Periode $2R\pi$ ergeben das gleiche Bild auf der Erdkugel. Diese periodischen Bilder als Mercator-Projektion sind mit der dargestellten Theorie als Lösung einer AWA erklärbar. Hierzu das 3. Beispiel.

Addieren wir bezüglich \bar{y} in dem 2. Beispiel mit dem Definitionsbereich der Kugelzone (80) $2R\pi$ hinzu, so folgt die gleiche Kugelzone auf der Erdkugel $r = R$

$$\begin{aligned}
 R\pi &\leq \bar{y} \leq 3R\pi \\
 -R\pi &\leq \bar{z} \leq R\pi
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

mit $\Delta\bar{y} = 2R\pi$, der 2. Umlauf.

Zur Anfangszeit $t = 1 \text{ sec}$ erhalten wir mit der Radialgeschwindigkeit (76) als Projektion des Gebietes G (87) in die (y, z) -Ebene das gleiche Anfangsbild wie im 2. Beispiel. Die Bezifferung der Meridiane ändert sich jedoch.

t [sec]	$d'_{12}(t)$ [m]	$d'_{23}(t)$ [m]	$d'_{13}(t)$ [m]
1	0.000 000 000	12 708 446.604 271 886	12 708 446.604 271 886
1.1	453 104.772 294 490	13 939 126.039 132 870	13 946 488.399 217 491
1.5	4 020 181.748 969 256	18 562 349.194 188 919	18 992 700.410 993 469
2	10 167 471.232 912 921	23 398 390.387 543 503	25 512 000.000 000 000
3	20 709 449.679 293 883	29 876 380.012 328 457	36 352 157.964 284 113
5	31 137 717.994 625 798	35 518 655.114 095 431	47 234 863.639 338 483
10^1	37 549 903.677 115 810	38 805 817.564 633 134	53 998 951.314 078 914
10^2	40 047 799.857 495 693	40 060 977.223 051 342	56 645 460.272 574 981
10^4	40 074 153.252 417 751	40 074 154.570 804 570	56 673 411.962 427 328
10^6	40 074 155.888 927 725	40 074 155.889 059 564	56 673 414.758 868 448
10^8	40 074 155.889 191 376	40 074 155.889 191 389	56 673 414.759 148 092
10^9	40 074 155.889 191 402	40 074 155.889 191 402	56 673 414.759 148 120
10^{10}	40 074 155.889 191 403	40 074 155.889 191 403	56 673 414.759 148 120

Tab. 5: Abstände $d'_{ij}(t)$ als Funktion der Zeit t

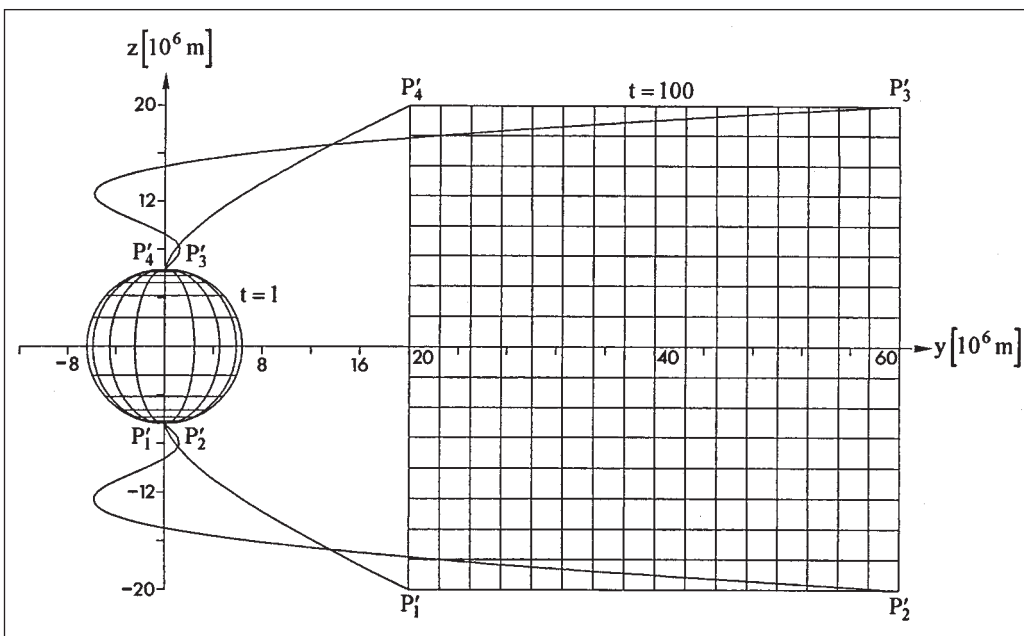


Abb. 20: Anfangsbild und Lösung der AWA zur Zeit $t = 100$ sec

Es gilt

$$\bar{y}_j = R\pi + j\frac{\pi}{8}R, \quad |\bar{z}| \leq R\pi \quad \text{für } j = 0(1)16. \quad (88)$$

In der Abb. 20 ist zur Zeit $t = 1$ sec das Anfangsbild sowie die Lösung der AWA zur Zeit $t = 100$ sec dargestellt, im Weiteren in $1 \leq t \leq 100$ sec die Projektionen ausgewählter Bahnkurven bezüglich

$$\begin{aligned} P_1' : \bar{y}_1 &= R\pi, & \bar{z}_1 &= -R\pi \\ P_2' : \bar{y}_2 &= 3R\pi, & \bar{z}_2 &= -R\pi \\ P_3' : \bar{y}_3 &= 3R\pi, & \bar{z}_3 &= R\pi \\ P_4' : \bar{y}_4 &= R\pi, & \bar{z}_4 &= R\pi \end{aligned}$$

Literatur

Mittermayer, E.: Die Kugel, Wissenschaft und Technik Verlag Dr. Jürgen Groß, 2. erweiterte Auflage, Berlin, 1998.
 Mittermayer, E.: Hyperbolische Drehflächen bezgl. der r -Linien metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten 106, S. 175–187, 1999a.

Mittermayer, E.: Die Flächennormale der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten 106, S. 258–265, 1999b.
 Mittermayer, E.: Implizite Darstellung der hyperbolischen Drehflächen metrischer Kugelkoordinaten (Mercator) und Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten 106, S. 295–299, 1999c.
 Mittermayer, E.: Die Gaußschen Koordinaten als Ortsfunktionen und Funktionentheorie/Vektoranalysis. Allgemeine Vermessungsnachrichten, S. 405–416, 1999d.
 Mittermayer, E.: Kinematik der geographischen Länge und geographischen Breite (Mercator). Allgemeine Vermessungsnachrichten 106, S. 57–64, 1999e.
 Mittermayer, E.: Differentialgeometrische Betrachtungen der biharmonischen Flächen $r \cdot l = const.$ Allgemeine Vermessungsnachrichten 107, S. 23–30, 2000a.
 Mittermayer, E.: Eine weitere Parameterdarstellung der biharmonischen Flächen $r \cdot \lambda = const.$ Allgemeine Vermessungsnachrichten 107, S. 94–103, 2000b.
 Mittermayer, E.: Mercator-Projektion und die Kugelloxodrome. Allgemeine Vermessungsnachrichten 108, S. 58–68, 2001.

Anschrift des Autors

Dr.-Ing. Eberhard Mittermayer, Univ. Prof., TU Berlin
 Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik, Sekr. H12
 Straße des 17. Juni 135, 10623 Berlin
 E-mail: mit@mca.bv.tu-berlin.de