

Kongruenzanalyse auf der Basis originärer Beobachtungen

Michael Lösler, Cornelia Eschelbach und Rüdiger Haas

Zusammenfassung

Das Überprüfen von Objektveränderungen im Rahmen einer statistisch fundierten Deformationsanalyse ist eine Kernaufgabe der Ingenieurgeodäsie. Insbesondere in den 1970er und 1980er Jahren wurden von verschiedenen Institutionen die mathematischen und statistischen Grundlagen dafür herausgearbeitet und verschiedene Modelle entwickelt und gegenübergestellt. Auch wenn die moderne Messtechnik heute eine kontinuierliche und lückenlose Überwachung von Objekten zulässt, spielt die diskontinuierliche bzw. periodische Überwachung dennoch schon allein aus wirtschaftlichen Gründen weiterhin eine wesentliche Rolle in der angewandten Ingenieurgeodäsie. Während die Datenbasis einer Kongruenzanalyse häufig auf den Resultaten der Einzelepochenausgleichungen beruht, findet in diesem Beitrag ein Analysekonzept Anwendung, welches auf den originären Beobachtungen beruht. Auf der Basis des allgemeinen Data-Snoopings werden neben Beobachtungsfehlern auch Punktverschiebungen aufgedeckt. Durch die Integration zusätzlicher Bedingungs-gleichungen lässt sich darüber hinaus auch ein gemeinsames Deformationsverhalten im Rahmen einer Blockbewegungs- und Strainanalyse klassifizieren. Am Onsala Space Observatorium in Schweden erfolgte 2014 und 2015 eine umfangreiche Mess- und Überwachungskampagne, um das Stationsnetz an das amtliche Höhensystem anzuschließen und die Stabilität dieses Höhennetzes zu untersuchen. Bevor die Daten dieses realen Netzes analysiert werden, wird das vorgestellte Kongruenzmodell zunächst an einem synthetischen Lagenetz bewertet.

Summary

The congruence analysis is one of the major tasks in the field of applied engineering geodesy. The stability of an object is tested and evaluated based on statistical hypothesis testing. Especially in the 1970s and 1980s the necessary mathematical and statistical background was derived by several institutes. Based on these scientific fundamentals algorithms and software packages were developed and compared to each other. Although modern metrology allows today continual observations, for economic reasons the discontinuous or routine deformation analysis still plays a key role in applied geodesy today, because the instruments are not setup permanently. Usually, deformations are derived from the results of independent single adjustments. This article presents an analysis concept that combines the different original observation sets and furthermore integrates deformation analysis into one unified model. Based on Baarda's Data-Snooping method, a generalised hypothesis testing is introduced to detect questionable observations as well as object deformations. Moreover, shift and strain parameters can be estimated by extend-

ing the functional model of the least-squares algorithm. The approach is demonstrated on a synthetic horizontal network presented in 1983, followed by the analysis of a levelling network, which was observed at the Onsala Space Observatory in 2014 and 2015.

Schlüsselwörter: Kongruenzanalyse, Strainanalyse, Beobachtungsmethode, Hypothesentest, Netzausgleichung

1 Onsala Space Observatorium

Das 1949 gegründete Onsala Space Observatorium (OSO) ist eine schwedische Forschungseinrichtung, die Teil des Instituts für Weltraum- und Geowissenschaften der Chalmers Technische Hochschule in Göteborg ist und in Kooperation mit dem schwedischen Wissenschaftsrat betrieben wird. Das Observatorium liegt ca. 40 km südlich von Göteborg an der schwedischen Westküste und ist u. a. mit Instrumenten für die beiden geodätischen Weltraummessverfahren VLBI (Very Long Baseline Interferometry) und GNSS (Global Navigation Satellite System) ausgerüstet. Das Observatorium ist damit eine sogenannte Co-Location Station. Für VLBI-Beobachtungen steht neben dem 25 m Radioteleskop ein von einem schützenden Radom umschlossenes 20 m Radioteleskop zur Verfügung. Des Weiteren werden derzeit zwei baugleiche Radioteleskope für die nächste Generation geodätischer VLBI, VGOS (VLBI2010 Global Observing System), errichtet (vgl. Haas 2013). Für GNSS-Beobachtungen stehen gegenwärtig ca. sechs permanent installierte Antennen zur Verfügung. Das Observatorium ist Teil des Internationalen VLBI Service (IVS) und des Internationalen GNSS Service (IGS). Durch die geographische Nähe des Observatoriums zum Kattegat werden zusätzlich kontinuierliche Pegelmessungen durchgeführt. Hierfür stehen ein GNSS-Mareograf sowie mehrere sogenannte Bubble-Mareografen und ein Radar-Mareograf zur Verfügung. Seit 2015 ist das Observatorium eine offizielle Pegelmessstation im Pegelnetz des Schwedischen Meteorologischen und Hydrologischen Instituts (SMHI), das die nationale Verantwortung für Meeresspiegelbeobachtungen an der schwedischen Küste besitzt. Hierfür ist die Pegelmessstation zum einen an das offizielle schwedische Höhensystem RH2000 anzuschließen und deren Invarianz in periodischen Überwachungsmessungen nachzuweisen. Zum anderen sind gleichzeitig die Pegelmessstellen mit dem lokalen Stationsnetz am Observatorium zu verknüpfen (vgl. Haas et al. 2016). Im Rahmen von zwei umfangreichen Messkampagnen in den

Jahren 2014 und 2015 wurde das lokale Netz nivellistisch durch Präzisionsnivellements erfasst und an das offizielle schwedische Höhenbezugssystem RH2000 angeschlossen (Wulf 2014, Bieker 2015).

Im Folgenden werden im Abschnitt 2 diese beiden Messkampagnen zur Erfassung des Höhennetzes kurz beschrieben. Bevor die Analyse der erhobenen Daten erfolgt und die Ergebnisse im Abschnitt 4 präsentiert werden, wird das verwendete Kongruenzmodell im Abschnitt 3 erläutert und an einem synthetischen Datensatz demonstriert und mit den Resultaten anderer Institutionen verglichen.

2 Messkampagnen am Onsala Space Observatorium

Das lokale Vermessungsnetz des OSO befindet sich in einem zum Großteil naturbelassen Reservat. Gneisgestein formt in diesem Areal ein sehr bewegtes Geländeprofil,



Abb. 1: Die beiden im Bau befindlichen Onsala-Twin-Teleskope sowie das 25 m Radioteleskop im südlichen Teil am OSO

das bis zur Küste hinunter direkt an die felsige Uferlinie reicht. Das Vermessungsnetz des Observatoriums kann grob in vier Teilnetze gegliedert werden. Im Nordosten der Station befinden sich das 20 m IVS-Radioteleskop und die beiden IGS-Stationen. 2014 wurde im Süden im Zuge des Genehmigungsverfahrens der Onsala-Twin-Teleskope (OTT) ein weiterer Geländeabschnitt erschlossen, siehe Abb. 1. Auf diesem Geländeabschnitt befinden sich weitere GNSS-Monumente, die das bestehende GNSS-Netz zukünftig erweitern werden.

Südwestlich davon befinden sich zum einen das 25 m Radioteleskop für astronomische VLBI-Beobachtungen, die Bubble-Mareografen und der Radar-Mareograf als offizielle schwedische Pegelstationen. Der GNSS-Mareograf befindet sich im vierten Netzteil im Westen des Stationsnetzes. In allen Netzteilen finden sich neben den jeweiligen Referenzpunkten der Messinstrumente Sicherungsbolzen mit einer Zentrierbohrung. Diese erlauben somit eine Erfassung in Lage und Höhe und dienen zur Netzverknüpfung und als Kontrollpunkte.

2.1 Messkampagne 2014

Im Mai 2014 erfolgte die vollständige Höhenerfassung des Stationsnetzes mittels Präzisionsnivellement. Zu diesem Zeitpunkt stand der endgültige Standort für die OTT noch nicht fest, sodass in diesem Bereich nur der Sicherungsbolzen ONS8 vorhanden war. Der seinerzeit vorhandene Bubble-Mareograf wurde darüber hinaus 2015 durch ein neues Instrument ersetzt. Die Neuinstallation befindet sich jedoch in unmittelbarer Nähe zum alten Standort, sodass sich das 2014 angelegte Sicherungs- und Kontrollnetz weiterhin zur Überwachung eignet.

Die nivellistische Datenerhebung erfolgte mit einem Digitalnivellier DINI03 (Trimble) und 2 m Invar-Codeplatten als Präzisionsnivellement. Dieses Instrument ist mit einer Genauigkeit von 0,3 mm für einen Kilometer Doppelnivellement bei Verwendung von Invar-Codeplatten spezifiziert (Trimble 2007). Um den Einfluss einer möglichen Zielachsabweichung bei ungleichen Zielweiten zu minimieren, erfolgte die Bestimmung der Zielachsabweichung mehrfach über den gesamten Messzeitraum und in Anlehnung an die AdV-Feldanweisung nach Näbauer (vgl. AdV 2009). Alle Netzpunkte wurden redundant durch mindestens zwei unabhängig beobachtete Schleifen erfasst. Insgesamt wurde ein Nivellementsweg von ca. 7 km Gesamtlänge zurückgelegt, der sich auf 16 Schleifen verteilte. Die Messung der ersten beiden Schleifen erfolgte aus personellen Gründen im ungünstigeren RRVV (Rück-Rück-Vor-Vor) Modus. Alle übrigen Schleifen konnten im RVVR (Rück-Vor-Vor-Rück) Modus messtechnisch erfasst werden, sodass insbesondere Höhenänderungen des Instrumentenstandpunktes während einer Aufstellung aufdeckbar waren und die Messung ggf. direkt wiederholt werden konnte. Um eine möglichst stabile Aufstellung der Nivellierlatten zu gewährleisten, wurden diese jeweils mit zwei Fluchtstäben zusätzlich gestützt.

Insbesondere die Verwendung von 2 m Invar-Codeplatten erwies sich aufgrund der Geländestruktur als herausfordernd und führte zum Teil zu kurzen bzw. unterschiedlich langen Zielweiten; ein Umstand, der später in der Ausgleicheung zu berücksichtigen war. Eine detaillierte Beschreibung der Messkampagne findet sich in Wulf (2014).

2.2 Messkampagne 2015

Den baulichen Änderungen und den Erweiterungen des Stationsnetzes wurde in der Messkampagne im Mai 2015 Rechnung getragen. Durch die Standortfestlegung der OTT ist das Netz in diesem Bereich erheblich verdichtet worden, vgl. Abb. 2. Die Installation des neuen Bubble-Mareografen erfolgte teilweise durch Sprengung, sodass auch die Prüfung auf Unversehrtheit des Kontrollnetzes im Fokus der Messkampagne stand. Aufgrund der Erfahrungen von 2014 kamen zusammen mit dem DINI03 diesmal jedoch 3 m Invar-Codeplatten zum Einsatz. Bedingt

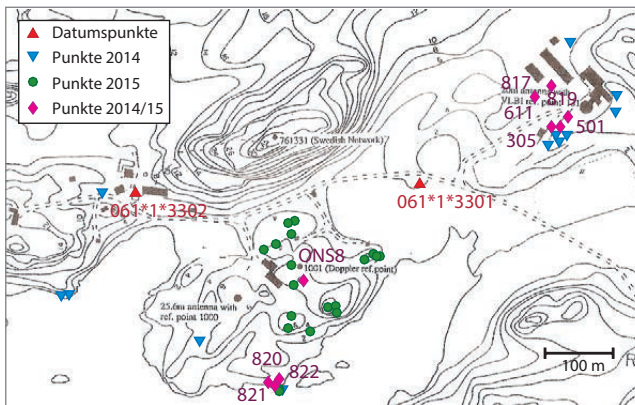


Abb. 2: Lage der erfassten Höhenpunkte am Onsala Space Observatorium: Die Datumspunkte sind rot gekennzeichnet. Blaue bzw. grün dargestellte Punkte wurden ausschließlich in der Epoche 2014 bzw. 2015 beobachtet. Magentafarbene Punkte hingegen wurden sowohl 2014 als auch 2015 beobachtet.

durch die gesteigerte Anzahl an Neupunkten wurde auf eine vollständige Wiederholungsmessung aller Punkte der Kampagne 2014 verzichtet und man beschränkte sich auf eine partielle Erfassung der o.g. Netzteile mit einer Schnittmenge von elf Höhenpunkten. Die Gesamtlänge der Nivellementstrecken verteilte sich auf 18 Schleifen und betrug ca. 8,3 km. Alle Schleifen wurden wiederum im RVVR-Modus erfasst. Um die Zuverlässigkeit der Messungen zu steigern, erfolgte die Aufnahme aller Punkte redundant in mindestens zwei unabhängigen Schleifen. Weitere Informationen zum Messablauf können Bieker (2015) entnommen werden.

Tab. 1: Eckdaten der Überwachungsmessungen aus den Jahren 2014 und 2015 am OSO

Epoche	Gesamtstrecke	Netzpunkte	Wechselpunkte
2014	6990 m	23	159
2015	8330 m	30	146

Tab. 1 fasst die wesentlichen Eckdaten beider Messperioden zusammen. Der Vorteil der längeren 3 m Nivellierlatten ist deutlich zu erkennen, da auch bei gestiegenem Nivellementsweg die Anzahl der Wechselpunkte reduziert werden konnte.

3 Datenanalyse

Die Auswertungen der Einzelepochen und die Kongruenzanalyse erfolgen in einer konventionellen freien Netzausgleichung, die lediglich um die Teststatistiken zum Nachweis der Stabilität der Referenzpunkte bzw. zur Bewertung möglicher Einzelpunktverschiebungen in den Objektpunkten zu erweitern ist. Durch eine Integration zusätzlicher Bedingungsgleichungen in das Modell der freien Netzausgleichung lassen sich gleichartige Defor-

mationen für einen oder mehrere Netzteile im Rahmen einer Blockbewegungs- und Strainanalyse detektieren. Die Einzelepochenauswertung, die Prüfung auf Kongruenz sowie die Blockbewegungs- und Strainanalyse basieren dadurch direkt auf den originären Beobachtungen. Diese deskriptive Beurteilung der Veränderung des Objektzustandes erfolgt somit anhand eines geometrischen Vergleichs (Kongruenzmodell). Die hier nicht weiter betrachteten kausalen Modelle, die die Objektveränderung in Abhängigkeit einwirkender Kräfte und der Zeit beschreiben, finden sich in Heunecke et al. (2013, Kap. 2.6).

3.1 Freie Netzausgleichung und Modellerweiterungen zur Schätzung von Störparametern

Die Analyse der erhobenen Daten erfolgt in mehreren Schritten. Das funktionale und das stochastische Modell der Netzausgleichung sind gegeben durch

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (1)$$

bzw.

$$\mathbf{C}_{\parallel} = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_{\parallel}. \quad (2)$$

Hierin beschreiben \mathbf{A} die $n \times u$ Koeffizientenmatrix, $\hat{\mathbf{x}}$ den Unbekanntenvektor der geschätzten Parameter, \mathbf{v} den Vektor der zufälligen Beobachtungsabweichungen und \mathbf{Q}_{\parallel} die Kofaktormatrix, welche sich unter Berücksichtigung des a-priori Varianzfaktors σ_0^2 aus der Kovarianzmatrix \mathbf{C}_{\parallel} der Beobachtungen \mathbf{l} ergibt. Der auftretende Datumsdefekt g wird durch zusätzliche Bedingungsgleichungen $\mathbf{G}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{g}$ eliminiert (z.B. Illner 1983)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{l} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Das so geränderte und durch den Korrelatenvektor \mathbf{k} erweiterte Gleichungssystem ist regulär und liefert neben dem Parametervektor $\hat{\mathbf{x}}$ und dessen Kofaktormatrix $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ auch eine Schätzung für den unbekanntem Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{v}}{n - u + g} = \frac{\Omega}{r}$ der Stichprobe (z.B. Jäger et al. 2005, Niemeier 2008).

Die Lösung der freien Netzausgleichung ist ein im Schwerpunkt der Datumspunkte gelagertes Netz ohne äußere (Anschluss-)Zwänge. Bekanntermaßen basiert die resultierende Netzstruktur ausschließlich auf den in der Ausgleichung berücksichtigten Beobachtungen, weshalb die freie Netzausgleichung besonders zum Auffinden von inkonsistenten Daten und zur Abstimmung des stochastischen Modells herangezogen wird. Die Prüfung, Bewertung und ggf. Anpassung des stochastischen Modells \mathbf{C}_{\parallel} erfolgt bei ausreichender Beobachtungsredundanz i.d.R. mittels Varianzkomponentenschätzung (z.B. Förstner 1979, Sieg und Hirsch 2000). Inkonsistenzen in

den Beobachtungen können hingegen als unzureichende Parametrierung des funktionalen Modelles aufgefasst werden und lassen sich folglich durch eine Modellerweiterung beheben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{l} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{l} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Hierin ist $\hat{\mathbf{v}}$ der Vektor der Zusatzparameter zur Kompensierung der möglichen Modellstörungen im funktionalen Modell und die Designmatrix \mathbf{B} enthält die zugehörigen Koeffizienten. Liegt keine Modellstörung vor, so darf die zusätzliche Integration von $\hat{\mathbf{v}}$ keine signifikante Auswirkung auf das Ausgleichsergebnis haben. Der Erwartungswert der Zusatzparameter ist somit $E\{\hat{\mathbf{v}}\} = \mathbf{0}$. Mittels Hypothesentest lassen sich die geschätzten Zusatzparameter $\hat{\mathbf{v}}$ auf Signifikanz prüfen (vgl. Koch 1975). Die vollständige Lösung des erweiterten Modells muss dabei nicht explizit bestimmt werden, da für die explizite Prüfung lediglich die Zusatzparameter $\hat{\mathbf{v}}$ von Interesse sind. Diese lassen sich direkt aus der Lösung des nicht-erweiterten Ausgangsmodells ableiten (vgl. Jäger et al. 2005, S. 185 f.).

$$\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{v} \quad (5)$$

mit der zugehörigen Kofaktormatrix

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} \mathbf{Q}_{\parallel}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \quad (6)$$

worin $\mathbf{Q}_{\mathbf{v}\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\parallel} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{A}^T$ die Kofaktormatrix der Beobachtungsverbesserungen ist.

Zur Prüfung der Nullhypothese, dass keine Modellstörung vorliegt, lassen sich die beiden Fisher-verteilten Teststatistiken T_{prio} bzw. T_{post} formulieren, die sich in der Wahl des Varianzfaktors unterscheiden. Während sich T_{prio} unter Berücksichtigung von σ_0^2 zu

$$T_{prio} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}}{m \sigma_0^2} \sim F_{m, \infty} \Big|_{H_0} \quad (7)$$

ergibt, leitet sich T_{post} aus

$$T_{post} = \frac{\hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}}{m \hat{\sigma}_0^2} \sim F_{m, r-m} \Big|_{H_0} \quad (8)$$

ab (z. B. Lehmann und Lösler 2016). Hierin ist $m = \text{rg}(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}})$

und $\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\Omega - \hat{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}^{-1} \hat{\mathbf{v}}}{r - m}$ entspricht dem aus der Stichprobe geschätzten a-posteriori Varianzfaktor des erweiterten Modells (Heck 1981).

Beide Teststatistiken folgen beim Zutreffen der Nullhypothese der zentralen Fisher-Verteilung F_{f_1, f_2} mit den beiden Freiheitsgraden f_1 und f_2 . Ist die Nullhypothese

zugunsten der Alternativhypothese $E\{\hat{\mathbf{v}}\} = \tilde{\mathbf{v}}$ zu verwerfen, so folgen diese der nichtzentralen Fisher-Verteilung F_{λ, f_1, f_2} mit dem Nichtzentralitätsparameter λ

$$\lambda_{prio} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}}{\sigma_0^2} \quad (9)$$

bzw.

$$\lambda_{post} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}}{\hat{\sigma}_0^2}. \quad (10)$$

Häufig lässt sich jedoch nur die Größe des Erwartungswertes der Nullhypothese spezifizieren, sodass für das Alternativmodell lediglich $E\{\hat{\mathbf{v}}\} \neq \mathbf{0}$ zu formulieren ist (vgl. Pelzer 1971, S. 56 ff.). Die Gl. (9) und Gl. (10) lassen sich jedoch umformen. Durch Vorgabe einer Irrtumswahrscheinlichkeit α für den Fehler 1. Art und einer Wahrscheinlichkeit β für den Fehler 2. Art liegt der Nichtzentralitätsparameter $\lambda(\alpha, \beta, m)$ fest (vgl. Hahn et al. 1989, Velsink 2015). Hierdurch lässt sich die Größe einer Modellstörung ∇ abschätzen, die mit einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit α und einer Testgüte $(1-\beta)$ aufgedeckt werden kann. Eine geschätzte Modellstörung $\hat{\mathbf{v}}$, die kleiner ist als die mit diesem Test gerade noch aufdeckbare Modellstörung ∇ , wäre demnach als zufällig zu betrachten. Übliche Werte in der Ingenieurgeodäsie sind $\alpha = 1 \%$ bzw. $\alpha = 0,1 \%$ und $\beta = 10 \%$ bzw. $\beta = 20 \%$. Während ∇ für $m = 1$ eindeutig bestimmt werden kann, besitzt das Gleichungssystem (9) bzw. (10) des Sensitivitätshyperellipsoids für $m > 1$ unendlich viele Lösungen. Beim Vorliegen von konkreten Messwerten sollte daher die gerade noch aufdeckbare Modellstörung ∇ zur besseren Interpretation auch in Richtung der geschätzten Modellstörung $\hat{\mathbf{v}}$ zeigen.

Sollen die erhobenen Beobachtungen auf konterminierte Daten hin untersucht werden, wird i. d. R. jeder funktionale Zusammenhang bzgl. einer möglichen Modellstörung separat bewertet, hierfür sind n individuelle Modellerweiterungen durchzuführen. Der Parametervektor wird hierzu jeweils lediglich um einen einzelnen Störparameter \hat{v}_j erweitert und die Designmatrix $\mathbf{B}_j^T = (0 \dots 1 \dots 0)$ ist ein Nullvektor, der lediglich an der Stelle des zu prüfenden funktionalen Zusammenhangs die Zahl Eins enthält. Da eine einzige Modellstörung jedoch aufgrund der nicht-robusten Eigenschaften der Methode der kleinsten Quadrate mehrere funktionale Zusammenhänge beeinflussen kann (vgl. Jäger et al. 2005, S. 128), wird üblicherweise nur das Modell bewertet, welches die größte Teststatistik aufweist. Ist die Nullhypothese zu verwerfen, so ist die korrespondierende Beobachtung von der weiteren Berechnung auszuschließen und eine erneute Prüfung erfolgt mit den verbleibenden $n - 1$ funktionalen Zusammenhängen. Die iterative Analyse der Daten wird solange wiederholt, bis die Nullhypothese für keine geschätzte Modellstörung mehr abgelehnt wird. Diese auf Baarda (1986) zurückgehende Vorgehensweise

wird in der geodätischen Literatur als Data-Snooping bezeichnet und hat sich in der praktischen Anwendung bewährt (van Mierlo 1982). Im Abschnitt 3.2 und 3.3 wird diese Vorgehensweise auf das Aufdecken von Punkt- oder Netzveränderungen im Rahmen einer geometrischen Deformationsanalyse übertragen. Alternative rechenintensivere Ansätze zum iterativen Vorgehen beim Aufdecken von Modellstörungen sind in Lehmann und Lösler (2016) beschrieben und basieren auf der gleichzeitigen Bewertung verschiedener Alternativmodelle.

3.2 Kongruenzmodell

Im Rahmen einer geometrischen Deformationsanalyse sind epochal erfasste Objektzustände miteinander zu vergleichen und bzgl. Veränderungen zu bewerten. Ausgehend von einer a-priori Zerlegung des Gesamtnetzes in ein Referenzpunktnetz und ein Objektpunktnetz schlägt Heck (1983) eine freie Ausgleichung der bereinigten Beobachtungen \mathbf{I}_1 und \mathbf{I}_2 der jeweiligen Einzelepochenbewertung in einem gemeinsamen Modell vor. Während das Referenzpunktnetz im Falle einer absoluten Deformationsanalyse als invariant angenommen wird, wird für eine relative Deformationsanalyse zumindest von einem homogenen Deformationsverhalten des Referenzpunktnetzes ausgegangen. Die folgende Betrachtung beschränkt sich auf das Vorliegen von zwei Epochen, wobei Zusatzunbekannte wie bspw. Orientierungen eliminiert seien. Eine Übertragung auf mehrere Epochen und ohne vorherige Eliminierung ist jedoch problemlos möglich

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{R,1} & \mathbf{A}_{O,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{R,2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{O,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_R \\ \hat{\mathbf{x}}_{O,1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{O,2} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Die gemeinsame Auswertung der Daten beider Epochen in einem Modell basiert auf der Annahme, dass zumindest das Referenzpunktnetz der ersten Epoche mit dem Referenzpunktnetz der zweiten Epoche kongruent ist. Während für die als verändert angenommenen Objektpunkte eine Separierung durch $\mathbf{A}_{O,1}$ und $\mathbf{A}_{O,2}$ in der Designmatrix sowie durch $\hat{\mathbf{x}}_{O,1}$ und $\hat{\mathbf{x}}_{O,2}$ im Parametervektor erfolgt, sind die Referenzpunktkoordinaten $\hat{\mathbf{x}}_R$ epochenübergreifend und definieren somit das identische Datum in der freien Netzausgleichung (vgl. Jäger et al. 2005, S. 274). Als stochastisches Modell wird das bereits in den Einzelepochenbewertungen abgeleitete jeweilige stochastische Modell verwendet, wobei stochastische Abhängigkeiten zwischen den Epochen aufgrund der meist großen Zeitspanne zwischen den Datenerhebungen vernachlässigt werden können und \mathbf{C}_{II} eine blockdiagonale Gestalt annimmt

$$\mathbf{C}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1;1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{1;2} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Bevor eine Analyse auf Objektpunktveränderungen vorgenommen werden kann, ist die Invarianz der Referenzpunkte nachzuweisen. Dieser Nachweis kann sowohl durch einen impliziten Hypothesentest (vgl. Heck 1983, Antonopoulos und Niemeier 1983) als auch durch den in Abschnitt 3.1 beschriebenen expliziten Hypothesentest erfolgen (vgl. Kälber und Jäger 2001, Illner 2008), welcher hier weiterverfolgt werden soll. Liegt im j -ten Referenzpunkt eine Veränderung zwischen der ersten und zweiten Epoche vor, so kann dieser Referenzpunkt in der zweiten Epoche als Funktion der Koordinaten der ersten Epoche $\hat{\mathbf{x}}_{j,1}$ und der Veränderung $\hat{\mathbf{V}}_j$ beschrieben werden, um das funktionale Modell richtigzustellen. Das erweiterte Modell ergibt sich zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{R,1} & \mathbf{A}_{O,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{R,2} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{O,2} & \mathbf{B}_{j,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_R \\ \hat{\mathbf{x}}_{O,1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{O,2} \\ \hat{\mathbf{V}}_j \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Diese Vorgehensweise entspricht somit den Ausführungen im Abschnitt 3.1, wobei diese Modellerweiterung nicht nur eine, sondern alle funktionalen Beziehungen mit einbezieht, an denen der j -te Punkt in der zweiten Epoche beteiligt ist. Mit den durch Gl. (7) und Gl. (8) gegebenen Teststatistiken T_{prio} bzw. T_{post} kann die Nullhypothese, es liegen keine Veränderungen im j -ten Referenzpunkt vor, geprüft werden. Sollte die Nullhypothese für einen oder mehrere Referenzpunkte verworfen werden, so ist analog zur beschriebenen Vorgehensweise im Abschnitt 3.1 iterativ jeweils der Punkt mit der größten Teststatistik aus der Gruppe der Referenzpunkte auszuschließen und die Prüfung mit den verbleibenden Referenzpunkten erneut durchzuführen. Als instabil klassifizierte Referenzpunkte werden im weiteren Verlauf als Objektpunkte im Modell (11) bzw. (13) in beiden Epochen separat berücksichtigt.

Mit dem Nachweis über ein stabiles Referenzpunktnetz kann sich die Bestimmung und Analyse weiterer Deformationsparameter anschließen. Eine Einzelpunktverschiebung im k -ten Objektpunkt lässt sich aus dem korrespondierenden m -dimensionalen Verschiebungsvektor

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{F}_k \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{O,1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{O,2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

und dessen zugehöriger Kofaktormatrix

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k \mathbf{d}_k} = \mathbf{F}_k \mathbf{Q}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{F}_k^T \quad (15)$$

wiederum über die beiden Teststatistiken

$$T_{prio,k} = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k \mathbf{d}_k}^{-1} \mathbf{d}_k}{m\sigma_0^2} \sim F_{m,\infty} | H_0 \quad (16)$$

bzw.

$$T_{post,k} = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{Q}_{\mathbf{d}_k}^{-1} \mathbf{d}_k}{m \hat{\sigma}_0^2} \sim F_{m,r} | H_0 \quad (17)$$

auf eine signifikante Abweichung vom Erwartungswert $E\{\mathbf{d}_k\} = \mathbf{0}$ prüfen. Die Koeffizientenmatrix $\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{k,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{k,2} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ besteht aus Nullmatrizen und ist lediglich an den Stellen, die mit dem k -ten Objektpunkt in der ersten bzw. zweiten Epoche korrespondieren, mit Einheitsmatrizen besetzt (vgl. Heck et al. 1977, Kunz und Schmitt 1979).

3.3 Blockbewegungs- und Strainanalyse

Während im vorherigen Abschnitt das Deformationsverhalten der Objektpunkte als individuelle Änderung jedes einzelnen Objektpunktes betrachtet wurde, lässt sich auch ein gleichartiges Deformationsverhalten von einer Gruppe von Objektpunkten bzw. von Netzteilen modellieren. Beispiele für ein solches gleichartiges Deformationsverhalten sind rezente Krustenbewegungen, Hangrutschungen oder Setzungen von Bauwerken. Nach Heunecke et al. (2013, Kap. 11.4) wird von einer Starrkörper- oder Blockbewegung gesprochen, wenn in einem Teilnetz lediglich translatorische bzw. rotative Veränderungen aber keine Verformungen auftreten. Änderungen eines Netzes durch Verformungen wie Dehnungen und Scherungen werden hingegen durch eine Strainanalyse beschrieben. Als mathematische Beschreibung von Blockbewegungen und Verformungen dient i. d. R. eine affine Transformation (z. B. Tsenkov und Gospodinov 2002, Heinert et al. 2004). Diese Affintransformation besitzt dabei in der Ebene ($d = 2$) sechs und im Raum ($d = 3$) zwölf Parameter

$$\hat{\mathbf{x}}_{O,2,k} = \mathbf{T} + \mathbf{R}\mathbf{W}(\mathbf{I} + \mathbf{M})\hat{\mathbf{x}}_{O,1,k} \quad (18)$$

Hierbei sind \mathbf{T} der Translationsvektor, \mathbf{R} die Rotationsmatrix, \mathbf{W} die Matrix der Scherparameter und \mathbf{M} die Diagonalmatrix der Maßstabsänderungen pro Koordinatenkomponente. Durch entsprechende Reduktion der Parameter lässt sich das Transformationsmodell auf eine reine Blockbewegung, eine reine Verformung oder auch auf ein gemischtes Modell vereinfachen (z. B. Lösler und Eschelbach 2014). In einem Höhennetz ($d = 1$) entfällt das Produkt $\mathbf{R}\mathbf{W} = \mathbf{I}$. Blockbewegungs- und Strainparameter für verschiedene Dimensionen d sind in Tab. 2 zusammengefasst.

Die Schätzung der Blockbewegungs- und Strainparameter erfolgt durch die Integration zusätzlicher Bedin-

Tab. 2: Schätzbare Blockbewegungs- und Strainparameter in Abhängigkeit der Netzdimension d

Dimension	Translation	Rotation	Scherung	Maßstab
1D-Netz	t_z	–	–	m_z
2D-Netz	t_x, t_y	r	s	m_x, m_y
3D-Netz	t_x, t_y, t_z	r_x, r_y, r_z	s_x, s_y, s_z	m_x, m_y, m_z

gungsgleichungen $\mathbf{S}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{s}$ direkt im Ausgleichungsmodell (3) und mündet in einem Ausgleichungsmodell mit zusätzlichen Unbekannten in den Bedingungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{II}}^{-1} \mathbf{A} & \mathbf{G} & \mathbf{S} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{\mathbf{II}}^{-1} \mathbf{l} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Für jedes Objektpunktpaar $\hat{\mathbf{x}}_{O,1,k}$ und $\hat{\mathbf{x}}_{O,2,k}$, welches in die Schätzung der Blockbewegungs- und Strainparameter involviert ist, sind gemäß Gl. (18) d zusätzliche Bedingungs-gleichungen im Ausgleichungsmodell (19) zu berücksichtigen. Ferner ist der Parametervektor um die zusätzlichen Blockbewegungs- und Strainparameter $\hat{\mathbf{x}}_s$ zu erweitern. Analog zur Prüfung auf Einzelpunktverschiebungen im Abschnitt 3.2 lassen sich die beiden auf den Varianzfaktor a-priori σ_0^2 bzw. a-posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ bezogenen Teststatistiken

$$T_{prio,p} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_{S,p}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{S,p}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{S,p}}{m \sigma_0^2} \sim F_{m,\infty} | H_0 \quad (20)$$

und

$$T_{post,p} = \frac{\hat{\mathbf{x}}_{S,p}^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{S,p}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{S,p}}{m \hat{\sigma}_0^2} \sim F_{m,r} | H_0 \quad (21)$$

mit $m = \text{rg}(\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{S,p}})$ zum Prüfen des p -ten Parameters in $\hat{\mathbf{x}}_s$ auf signifikante Abweichungen vom vorgegebenen Erwartungswert $E\{\hat{\mathbf{x}}_{S,p}\} = \mathbf{0}$ formulieren (vgl. Koch 1975). Wird die jeweilige Nullhypothese nicht verworfen, so stellt der geschätzte Blockbewegungs- bzw. Strainparameter keine neue Information dar und kann aus dem Parametervektor und somit dem Ausgleichungsmodell verlustfrei eliminiert werden.

Durch das Einführen der zusätzlichen Bedingungs-gleichungen in Gl. (19) wird Zwang auf das Ausgleichungsmodell ausgeübt. Wird bspw. nur eine Blockverschiebung \mathbf{T} im Modell (18) parametrisiert, so werden alle Verschiebungsvektoren \mathbf{d}_k der zur Bestimmung von \mathbf{T} involvierten Objektpunkte unabhängig von ihrer tatsächlichen Verschiebung zu $\mathbf{d}_k = \mathbf{T}$ gesetzt. Aus diesem Grund ist die Modellkonformität der Objektpunkte bzgl. der gewählten Blockbewegungs- und Strainparameter $\hat{\mathbf{x}}_s$ sicherzustellen. Die durch den Zwang $\mathbf{S}^T \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{s}$ hervorgerufene Modellstörung der Schätzung der k -ten Objektpunkt-kordinate $\hat{\mathbf{x}}_{O,2,k}$ der zweiten Epoche lässt sich analog zum Stabilitätsnachweis der Referenzpunkte nach Gl. (13) durch eine Modellerweiterung richtigstellen, wobei wiederum alle funktionalen Beziehungen einzubeziehen sind, an denen der k -te Objektpunkt in der zweiten Epoche beteiligt ist

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{R,1} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{O,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{R,2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{O,2} & \mathbf{B}_{k,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_R \\ \hat{\mathbf{x}}_S \\ \hat{\mathbf{x}}_{O,1} \\ \hat{\mathbf{x}}_{O,2} \\ \hat{\mathbf{V}}_k \end{bmatrix} \quad (22)$$

Die zugehörigen Teststatistiken ergeben sich wiederum nach Gl. (7) bzw. Gl. (8). Die Analyse der geschätzten Blockbewegungs- und Strainparameter muss mit einer Prüfung auf Modellkonformität einhergehen. Es genügt demnach nicht, die Signifikanz der geschätzten Parameter $\hat{\mathbf{x}}_s$ nachzuweisen ohne den Einfluss der zusätzlichen Bedingungsgleichungen auf das Gesamtnetz zu bewerten.

3.4 Testnetz Delft

Das Überprüfen auf Objektveränderungen im Rahmen einer statistisch fundierten Deformationsanalyse ist eine Kernaufgabe der Ingenieurgeodäsie. Insbesondere in den 1970er und 1980er Jahren wurden von verschiedenen Institutionen die mathematischen und statistischen Grundlagen herausgearbeitet, und verschiedene Modelle entwickelt und gegenübergestellt. Einen guten Überblick geben Caspary und Welsch (1979), Welsch (1983) sowie Jäger und Drixler (1990). Basierend auf einer kombinierten freien Ausgleichung von zwei Epochen wurde im vorherigen Abschnitt ein Kongruenzmodell mit durchgehend expliziter Hypothesenformulierung beschrieben. Durch die Integration von zusätzlichen Bedingungsgleichungen können neben Einzelpunktverschiebungen auch Blockbewegungen oder Strains von Teilnetzen geschätzt und analysiert werden.

In Kok (1983) finden sich simulierte Daten des 2D-Deformationsnetzes *Delft*, welcher auch gegenwärtig noch zur Validierung und Bewertung von Algorithmen herangezogen wird (z.B. Velsink 2015). Neben Beobachtungen einer Nullepoche liegen Beobachtungen von weiteren vier Folgeepochen (2A, 2B, 3A und 3B) vor. Ein Vergleich ist stets zwischen der Nullepoche und einer Folgeepoche durchzuführen. Das stochastische Modell ist aus Gründen der Vergleichbarkeit vorgegeben und in Tab. 3 zusammengefasst. Grobe Fehler in den Beobachtungen wurden nicht simuliert. Das Netz enthält 14 Punkte, die gemeinsam in allen Epochen beobachtet wurden. Die Punkte 7 und 19 wurden nach der Nullepoche zerstört und durch die Punkte 97 und 99 in unmittelbarer Nähe ersetzt. Der Punkt 9 wurde nur in den Folgeepochen beobachtet. Durch das Testnetz *Delft* verläuft eine Verwerfungslinie, die das Netz in zwei Teilnetze aufteilt, sodass sich das Testnetz für eine Blockverschiebungs- oder Strainanalyse empfiehlt. Das westliche Teilnetz umfasst die Punkte 13, 15, 17, 19 (99), 21, 35, 37, 43, 45, 47. Die Punkte

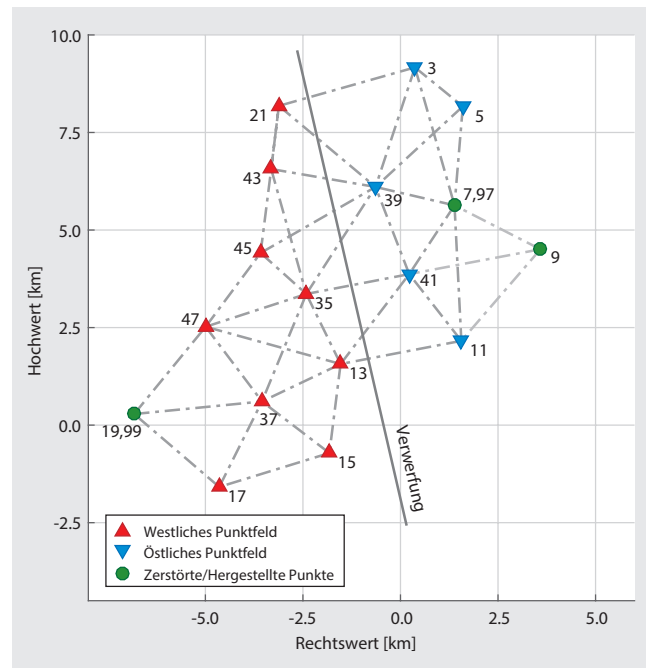


Abb. 3: Punktlage im Testnetz Delft mit vorgegebener Verwerfungsgrenze: Rot und blau dargestellt sind die in allen Epochen messbaren Punkte des westlichen bzw. östlichen Teilnetzes. In grün sind zerstörte bzw. neu eingerichtete Punkte geplottet. Linien zwischen den Punkten symbolisieren die gegebenen Netzbeobachtungen. Durch das Netz verläuft einer Verwerfungsgrenze.

3, 5, 7 (97), (9), 11, 39, 41 liegen hingegen im östlichen Teil, vgl. Abb. 3. Das Netz weist Änderungen im Design 1. und 2. Ordnung aufgrund des geänderten Netzdesigns und des unterschiedlichen Genauigkeitsniveaus zwischen den Messepochen auf (vgl. Schmitt 1985).

Anhand dieses Testnetzes, für welches neben den tatsächlich simulierten Deformationen auch Analyseergebnisse von verschiedenen Institutionen vorliegen, soll das beschriebene und in Java Graticule 3D (JAG3D; <http://javagraticule3d.sf.net>) implementierte Kongruenzmodell validiert werden. Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 3 werden zunächst die Einzelepochen separat ausgewertet. Die getrennte Auswertung der Einzelepochen stellt sicher, dass im Ergebnis das Beobachtungsmaterial frei von groben Messabweichungen ist und Fehlmessungen bei der gemeinsamen Auswertung nicht fälschlicherweise als Deformationen klassifiziert werden. Tab. 3 stellt das abgeleitete stochastische Modell dem vorgegebenen gegenüber. Um die abgeleiteten Ergebnisse besser einordnen und vergleichen zu können, wird für die weitere Analyse jedoch das vorgegebene stochastische Modell verwendet. Beobachtungen wurden entsprechend der Vorgaben nicht eliminiert, auch wenn die zugehörigen Teststatistiken nach Gl. (7) bzw. Gl. (8) aufgrund des unbefriedigenden stochastischen Modells den kritischen Wert der Fisher-Verteilung überschritten. Die Bewertung der Teststatistiken erfolgt einheitlich

Tab. 3: Vorgegebenes und abgeleitetes stochastisches Modell für die Epochen des Testnetzes Delft

Epochen	Vorgegebene Unsicherheiten		Abgeleitete Unsicherheiten	
	Rich-tungen	Horizontal-strecken	Rich-tungen	Horizontal-strecken
1	0,1 mgon	1,0 cm	0,15 mgon	0,8 cm
2A, 2B, 3A, 3B	0,1 mgon	8,0 cm	0,1 mgon	10,0 cm

mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,1\%$ und einer Teststärke von $(1-\beta) 100\% = 80\%$ für den a-priori Einzeltest $T_{1,\infty}$. Alle weiteren Teststatistiken $T_{m,n}$ werden nach dem von Baarda (1968, Kap. 3) vorgeschlagenen und von Hahn et al. (1989) für allgemeine Fisher-verteilte $F_{m,n}$ Teststatistiken hergeleiteten Konzept zur Abstimmung der Teststatistiken (B-Methode) abgeleitet, wobei sich die abgestimmten Teststatistiken aufgrund der Forderung $\lambda_{1,\infty} = \lambda_{m,n}$ in Bezug auf die Alternativhypothese gleich sensitiv verhalten (vgl. Jäger et al. 2005, S. 209 f.). Die abgestimmte Irrtumswahrscheinlichkeit ergibt sich aus

$$\alpha_{m,n} = \alpha(\alpha_1, 1, \infty, m, n, \beta_{1,\infty} = \beta_{m,n}). \quad (23)$$

Unter Ausnutzung der Vorinformationen bzgl. einer möglichen Verwerfungsgrenze erfolgt die a-priori Datumsfestlegung für die gemeinsame freie Ausgleichung zweier Epochen zunächst über die Punkte im westlichen Teilnetz jedoch ohne den zerstörten bzw. hinzugefügten Punkt 19 bzw. 99, vgl. Abb. 3. Die Punkte im östlichen Teilnetz werden epochengetrennt als Neupunkte betrachtet, vgl. Gl. (11). Da die Bewertung bzgl. möglicher Deformationen der Objektpunkte immer in Bezug zum Referenzpunktnetz erfolgt, ist die Stabilität der gewählten Referenzpunkte sicherzustellen. Mittels der Modellerweiterung (13) und den zugehörigen Teststatistiken (7) und (8) wird daher jeder Referenzpunkt zunächst explizit überprüft. Wird die Nullhypothese für einen oder mehrere Punkte abgelehnt, wird der Punkt mit der größten Teststatistik aus der Gruppe der Referenzpunkte zunächst ausgeschlossen und als Objektpunkt betrachtet. Diese Vorgehensweise wird iterativ wiederholt, bis für keinen der verbleibenden Referenzpunkte die Nullhypothese verworfen wird und der Nachweis für ein konsistentes Referenznetz erbracht ist.

Entsprechend den Ausführungen im Abschnitt 3.2 folgt nun die Prüfung auf Einzelpunktverschiebungen der Objektpunkte. Sollte sich hierbei herausstellen, dass ein Referenzpunkt aufgrund von Verschmierungseffekten bei der Methode der kleinsten Quadrate fälschlicherweise der Gruppe der Objektpunkte zugeordnet wurde, so ist dieser wieder dem Referenzpunktnetz zuzuordnen. Die Ergebnisse der Einzelpunktverschiebungen des synthetischen Testnetzes *Delft* sind in Tab. 7 im Anhang aufgeführt. Alle Punkte, für die eine Punktverschiebung modelliert wurde, konnten aufgedeckt werden. Die Resultate der Blockverschiebungsanalyse nach Abschnitt 3.3 zum Aufdecken von gleichartigen Deformationen sind in Tab. 8 im Anhang zusammengestellt. Das ausschließliche Schätzen von Strainparametern liefert zwar nach Gl. (20) bzw. Gl. (21) zum Teil hochsignifikante Ergebnisse. Die Konformitätsprüfung dieses erweiterten Modells nach Gl. (22) schlägt jedoch fehl, sodass eine ausschließliche Schätzung von Strainparametern nicht sinnvoll erscheint. Das gemeinsame Schätzen von Blockbewegungs- und Strainparametern liefert hingegen nur für die Translation einen signifikanten Wert. Die Konformitätsprüfung des Modells einer reinen Blockbewegung wird nicht verworfen und

liefert signifikante Parameter für die Translation, sodass lediglich von einer gemeinsamen Blockverschiebung auszugehen ist. Verglichen mit den modellierten Verschiebungen zeigt sich, dass lediglich in der Auswertung der Epochen 1-3A der Punkt 11 fälschlicherweise zum Teilnetz der Blockverschiebung zugeordnet wurde. Zwar verläuft dessen Punktverschiebung in Richtung der modellierten Blockbewegung, jedoch ist der Verschiebungsbetrag kleiner als der der übrigen Punkte 3, 5, 39 und 41. Die geschätzte Modellstörung $\hat{V}_{11} = (-10,5 \text{ cm} \quad 3,2 \text{ cm})^T$ nach Gl. (22) ist zwar deutlich erhöht, verglichen mit der gerade noch aufdeckbaren Modellstörung der zugehörigen Sensitivitätsellipse $V_{11} = (-12,7 \text{ cm} \quad 3,8 \text{ cm})^T$ jedoch als zufällig zu betrachten.

Werden die erzielten Resultate mit den publizierten Ergebnissen anderer Institutionen verglichen, so zeigt sich, dass eine sehr hohe Übereinstimmung vorliegt. Für die Einzelpunktverschiebungen sind die abgeleiteten Deformationen praktisch identisch mit denen von Antonopoulos und Niemeier (1983). Bei den geschätzten Blockverschiebungsparametern ergeben sich hohe numerische Übereinstimmungen zu Heck (1983) oder Welsch und Zhang (1983). Ein numerischer Vergleich mit allen Institutionen ist leider nicht möglich, da die hierfür notwendigen numerischen Größen zum Teil nicht publiziert wurden. Insgesamt lässt sich jedoch feststellen, dass das von Jäger et al. (2005, S. 274 ff.) vorgeschlagene und in JAG3D implementierte Kongruenzmodell in der Lage ist, instabile Referenzpunkte und Objektveränderungen zu detektieren (siehe auch Jäcklin 2011, Sušić et al. 2015). Auch die Erweiterung dieses Modells um eine Blockverschiebungs- und Strainanalyse liefert Ergebnisse, die vergleichbar mit anderen Konzepten sind.

4 Auswertung der Onsala Nivellementsepochen 2014 und 2015

Die Auswertung der Epochen 2014 und 2015 erfolgt zunächst getrennt durch eine freie Netzausgleichung. Für den Netzanschluss stehen zwei Höhenanschlusspunkte (061*1*3301 und 061*1*3302) der schwedischen Landesvermessung zur Verfügung, die das geodätische Datum des Höhennetzes im System RH2000 definieren. Das stochastische Modell für ein Nivellementsnetz wird üblicherweise über einen streckenabhängigen Genauigkeitsansatz definiert (z. B. Niemeier 2008, S. 138). In beiden Netzmessungen wurde ein DINI03 verwendet, welches eine spezifizierte Genauigkeit von 0,3 mm für 1 km Doppelnivellement bei Verwendung von Invar-Codelatten besitzt. Diese Angabe berücksichtigt jedoch das Geländeprofil nicht, die Unsicherheiten eines Nivellements würden sich demnach unabhängig von der Anzahl der notwendigen Aufstellungen ergeben. Da aber die Unsicherheit der Schleife mit der Anzahl der Aufstellungen zunimmt, erscheint ein gemischtes Modell mit einem konstanten σ_c^2 und einem streckenabhängigen Anteil σ_s^2 realistischer. Die a-priori

Varianz eines Höhenunterschieds $\sigma_{\delta h}^2$ ergibt sich in diesem gemischten Modell aus

$$\sigma_{\delta h}^2 = \sigma_c^2 + \sigma_s^2 s, \tag{24}$$

worin s die Strecke in Kilometer zwischen den Punkten ist. Um die Anzahl der Aufstellungen im stochastischen Modell zu berücksichtigen, werden alle Wechsellpunkte als zusätzliche Unbekannte betrachtet und nicht aus dem Modell eliminiert. Als Beobachtung wird somit der Höhenunterschied einer Aufstellung betrachtet. Unter Berücksichtigung von Gl. (24) ergibt sich für die a-priori Varianz eines Höhenunterschieds zwischen zwei Netzpunkten mit w Wechsellpunkten

$$\sigma_{\delta h}^2 = w\sigma_c^2 + \sigma_s^2 s_w, \tag{25}$$

worin s_w die akkumulierte Strecke in Kilometer zwischen den Netzpunkten ist. Mit Gl. (25) kann eine Integration der Wechsellpunkte in den Parametervektor \mathbf{x} entfallen, was sich besonders bei sehr großen Netzen empfiehlt, um Ressourcen zu sparen. Für das Überwachungsnetz in On-sala wurde auf das Zusammenfügen der Wechsellpunkte jedoch verzichtet.

Das für die Kampagnen 2014 und 2015 abgeleitete a-priori Modell der Einzelepochenauswertung ist in Tab. 4 zusammengestellt und berücksichtigt neben der Anzahl der Wechsellpunkte (vgl. Tab. 1) auch das Beobachtungsverfahren. Die globalen Ausgleichsergebnisse der Einzelepochen sind in Tab. 5 zusammengefasst. Die geschätzten globalen Varianzfaktoren $\hat{\sigma}_0^2$ weichen nur unwesentlich von Eins ab und bestätigen das Zutreffen des gewählten Genauigkeitsansatzes. Die mittlere Standardabweichung $\bar{\sigma}_H$ liegt in beiden Epochen deutlich unter 0,3 mm für die Objektpunkte.

Um das Höhennetz auf Kongruenz zu prüfen, erfolgt eine gemeinsame freie Ausgleichung beider Epochen. Das Datum dieser Ausgleichung wird wiederum über die beiden Punkte der Landesvermessung definiert, vgl. Abb. 2. Die Objektpunkte, die in beiden Epochen beobachtet wurden, werden gemäß Gl. (11) epochenweise im Parametervektor berücksichtigt, sodass eine mögliche Veränderung dieser Punkte keine Spannungen auf die Ausgleichung ausübt. Der Referenzpunkttest nach Gl. (13) bestätigt die Stabilität der beiden Anschlusspunkte der Landesvermessung. Erwartungsgemäß zeichnet sich der Höhenwiderspruch in den Referenzpunkten von 0,15 mm mit unterschiedlichen Vorzeichen in der geschätzten aber insignifikanten Modellstörung ab. Für die Netzpunkte ergeben sich die in Tab. 6 gegebenen Punktverschiebungen.

Tab. 4: A-priori stochastisches Modell der Epochen 2014 und 2015 am OSO (Wulf 2014, Bieker 2015)

Epoche	Modus	σ_c	σ_s
2014	RRVV	0,15 mm	0,30 mm/ $\sqrt{\text{km}}$
	RVVR	0,10 mm	0,30 mm/ $\sqrt{\text{km}}$
2015	RVVR	0,07 mm	0,30 mm/ $\sqrt{\text{km}}$

Der kritische Wert für den Einzelpunkttest $K_{prio} = 10,83$ der Fisher-Verteilung ergibt sich für die gewählte Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha_{prio} = 0,1 \%$. Die mittels B-Methode (23) abgestimmte Irrtumswahrscheinlichkeit für den a-posteriori varianzbezogenen Test lautet $\alpha_{post} = 0,13 \%$ ($\beta = 20 \%$ und $\lambda = 17,07$) und entspricht dem kritischen Wert $K_{post} = 10,76$. Die größte Teststatistik findet sich im Punkt 822. Hierbei handelt es sich um einen der drei Sicherungsbolzen für den Bubble-Mareografen, vgl. Abb. 2. Die Teststatistiken T_{prio} und T_{post} überschreiten für den Punkt 822 die zugehörigen kritischen Werte nicht, sodass von keiner signifikanten Punktverschiebung auszugehen ist. Die Größe einer gerade noch aufdeckbaren Modellstörung liegt für diese Netzkonfiguration mit $\nabla \approx 1$ mm deutlich über dem korrespondierenden Schätzwert $\hat{\nabla}$ und entspricht aufgrund der gewählten Wahrscheinlichkeiten für α und β genähert dem dreifachen der mittleren Standardabweichung, vgl. Tab. 5. Weiterhin ist zu erkennen, dass bis auf den Datumspunkt 061*1*3301 alle geschätzten Modellstörungen negativ sind, was auf die

Tab. 5: Globale Ergebnisse der freien Epochenausgleichungen 2014 und 2015: Anzahl der Beobachtungen n , Gesamtredundanz r , geschätzter globaler Varianzfaktor $\hat{\sigma}_0^2$ sowie die geschätzten Varianzkomponenten $\hat{\sigma}_{0,c}^2$ und $\hat{\sigma}_{0,s}^2$ für den nach Gl. (24) konstanten bzw. streckenabhängigen Anteil und die mittlere Standardabweichung $\bar{\sigma}_H$ der Objektpunkte

Epoche	n	$r = n - u + g$	$1 : \hat{\sigma}_0^2$	$1 : \hat{\sigma}_{0,c}^2$	$1 : \hat{\sigma}_{0,s}^2$	$\bar{\sigma}_H$
2014	238	57	0,995	0,983	1,059	0,25 mm
2015	283	88	0,973	0,948	1,028	0,15 mm

Tab. 6: Geschätzte Einzelpunktverschiebung $\hat{\nabla}$, kleinste noch aufdeckbare Modellstörung ∇ sowie Teststatistiken T_{prio} und T_{post} der gemeinsamen Datums- und Objektpunkte der Epochen 2014 und 2015

Punkt	Typ	$\hat{\nabla}$ [mm]	∇ [mm]	T_{prio}	T_{post}
061*1*3301	Datum	+0,15	+1,44	0,18	0,18
061*1*3302	Datum	-0,15	-1,44	0,18	0,18
305	Objekt	-0,10	-0,95	0,20	0,20
501	Objekt	-0,15	-0,90	0,48	0,50
611	Objekt	-0,13	-0,92	0,35	0,36
817	Objekt	-0,26	-0,94	1,31	1,34
819	Objekt	-0,32	-0,98	1,74	1,78
820	Objekt	-0,08	-1,12	0,08	0,09
821	Objekt	-0,29	-1,12	1,12	1,14
822	Objekt	-0,37	-1,12	1,84	1,88
ONS8	Objekt	-0,20	-0,94	0,80	0,82

Wahl des Netzdatums zurückzuführen ist und nicht auf eine Blockverschiebung für ein Teilnetz, wie eine nähere Analyse ergab. Das gewählte Referenznetz in Onsala besteht derzeit nur aus den beiden Punkten 061*1*3301 und 061*1*3302 der Landesvermessung. Dies ist insofern kritisch, als dass eine mögliche Punktveränderung in einem der Referenzpunkte nicht genau zugeordnet werden kann. Um einen instabilen Referenzpunkt klassifizieren zu können, sollten demnach mindestens drei Referenzpunkte vorhanden sein. Da für alle neun Objektpunkte im Netz keine signifikanten Veränderungen festgestellt werden konnten, können diese Punkte zukünftig auch der Referenzpunktgruppe zugeordnet werden, sodass eine eindeutige Zuordnung auftretender Deformationen im Referenzpunktnetz möglich wird.

5 Zusammenfassung

Zu den Kernaufgaben der Ingenieurgeodäsie gehört neben der Aufnahme und Absteckung die Überwachung von Objekten, sowie die Entwicklung und Bereitstellung von geeigneten Algorithmen zur sachgerechten Bearbeitung und Analyse. Die Auswertung von geodätischen Netzen mittels Ausgleichung ist eine anerkannte Methode und findet in vielen Bereichen der Geodäsie Anwendung. Das mathematische Modell einer freien Netzausgleichung mit den Daten von mindestens zwei Epochen kann direkt für eine geometrische Deformationsanalyse herangezogen werden. Das Modell ist hierzu lediglich um Hypothesentests zu erweitern, mit denen die Stabilität der Referenzpunkte nachgewiesen bzw. Änderungen in den Objektpunkten aufgedeckt werden können. Die so formulierte Beobachtungsmethode nutzt zur Analyse die originären Beobachtungen und modelliert Störparameter im Referenzpunktfeld direkt in den Beobachtungsgleichungen. Durch die Integration von zusätzlichen Bedingungsgleichungen im Ausgleichungsmodell lassen sich neben den Einzelpunktverschiebungen auch Blockbewegungs- und Strainparameter schätzen. Aus Entwicklersicht bedeutet dies, dass nur kleine Änderungen an einer bestehenden Applikation zur Netzausgleichung vorgenommen werden müssen, um den bestehenden Algorithmus um eine Deformationsanalyse zu erweitern. Für den Anwender ergibt sich der große Vorteil, dass die Kongruenzanalyse direkt in der ihm vertrauten Umgebung einer freien Netzausgleichung durchführbar ist und keine Zusatzsoftware notwendig wird.

Mit dem in Kok (1983) gegebenen synthetischen Deformationsnetz *Delft* konnte das beschriebene und in JAG3D implementierte Kongruenzmodell sowie die Blockbewegungs- und Strainanalyse verifiziert und mit den Ergebnissen anderer Institutionen verglichen werden. Zwar ergeben sich marginale Unterschiede in den Lösungen, diese sind aber auf eine andere Modellbildung bei der Analyse, unterschiedlich gewählte stochastische

Modelle oder eine abweichende Festlegung der Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. der Testgüte zurückzuführen.

Am Onsala Space Observatorium wurde 2014 eine umfangreiche Nivellementskampagne durchgeführt, um die Mareografen, die die Höhenvariationen des Meeresspiegels erfassen, mit dem lokalen Stationsnetz zu verbinden und am offiziellen schwedischen Höhenbezugssystem anzuschließen. Im Jahre 2015 wurde ein neuer Mareograf in Betrieb genommen, welcher seit 2015 auch eine offizielle Pegelmessstelle des Schwedischen Meteorologischen und Hydrologischen Instituts ist. Die Integration dieses Mareografen in das Stationsnetz sowie die Netzerweiterung aufgrund der sich im Bau befindenden Twin-Radioteleskope erforderten eine weitere Messkampagne 2015. Ferner sollte im Rahmen der Wiederholungsmessung geprüft werden, ob und ggf. in welcher Größenordnung Höhenvariationen aufgetreten sind. Die Analyse der erhobenen Daten durch das beschriebene Kongruenzmodell mit dem Softwarepaket JAG3D ergab, dass eine signifikante Höhenänderung für keinen der geprüften Netzpunkte nachweisbar ist.

6 Anhang

Tab. 7 enthält die geschätzten Einzelpunktverschiebungen der Epochenanalyse 1-2A, 1-2B, 1-3A und 1-3B des Testnetzes *Delft*. Zum Vergleich sind neben den in JAG3D erzielten Ergebnissen auch die numerischen Werte von Antonopoulos und Niemeier (1983) angegeben und die modifizierten Punktverschiebungen von Kok (1983) aufgeführt.

Die Schätzung von gemeinsamen Deformationsparametern (18) für einen Netzteil ergab, dass lediglich Blockverschiebungsparameter signifikant nachweisbar sind. Tab. 8 enthält die geschätzten Translationen für die Epochenauswertung 1-2A, 1-2B, 1-3A und 1-3B. Zum Vergleich sind die von Heck (1983) angegebenen numerischen Werte mit angegeben.

Literatur

- AdV (2009): Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland: Feldanweisung für die Präzisionsnivellements zur Erneuerung und Wiederholung des Deutschen Haupthöhennetzes (DHHN) im Zeitraum 2006 bis 2011. 3. Fassung vom 01.08.2009.
- Antonopoulos, A., Niemeier, W. (1983): Formulierung und Test impliziter linearer Hypothesen bei der geodätischen Deformationsanalyse. In: Welsch, W.M. (Hrsg.): Deformationsanalysen '83 – Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 9, ISSN: 0173-1009, S. 13–27.
- Baarda, W. (1968): A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. 5, 2, Netherlands Geodetic Commission, Delft.
- Bieker, S. (2015): Einmessung des GNSS-Kontrollnetzes der TWIN-Teleskope an der Fundamentalstation Onsala. Bachelorarbeit, Frankfurt University of Applied Sciences, Chalmers University of Technology, unveröffentlicht.

Tab. 7: Geschätzte Einzelpunktverschiebungen in [cm] im Testnetz Delft. Zum Vergleich sind in runden Klammern () die Ergebnisse von Antonopoulos und Niemeier (1983) und in eckigen Klammern [] die modifizierten Punktverschiebungen von Kok (1983) angegeben.

Punkt	Epochen 1-2A		Epochen 1-2B		Epochen 1-3A		Epochen 1-3B	
	d_y	d_x	d_y	d_x	d_y	d_x	d_y	d_x
3	23,4 (23,2) [20,0]	-2,1 (-1,9) [2,0]	15,7 (x) [12,0]	17,4 (x) [20,0]	19,7 (25,5) [20,0]	37,6 (36,6) [40,0]	24,2 (28,9) [20,0]	37,8 (36,2) [40,0]
5	16,7 (16,6) [12,0]	20,0 (20,2) [20,0]	15,1 (x) [12,0]	19,8 (x) [20,0]	19,1 (23,2) [20,0]	41,8 (39,4) [40,0]	23,4 (26,6) [20,0]	40,7 (38,2) [40,0]
11	3,9 (3,8) [12,0]	25,5 (26,2) [20,0]	2,6 (-2,1) [12,0]	24,6 (24,2) [20,0]	0,8 (0,4) [10,0]	38,0 (36,6) [32,0]	10,3 (9,8) [20,0]	46,2 (44,8) [40,0]
15	-4,8 (x) [-6,0]	8,0 (x) [6,0]	x (x) [x]	x (x) [x]	-8,0 (-8,2) [-8,0]	-9,7 (-9,7) [-12,0]	x (x) [x]	x (x) [x]
21	x (x) [x]	x (x) [x]	x (x) [x]	x (x) [x]	x (5,3) [x]	x (5,6) [x]	x (4,5) [x]	x (3,3) [x]
39	8,9 (8,8) [12,0]	21,1 (21,2) [20,0]	6,3 (0,7) [12,0]	20,8 (16,7) [20,0]	12,9 (14,5) [20,0]	41,0 (40,6) [40,0]	15,4 (16,7) [20,0]	42,5 (41,8) [40,0]
41	5,0 (4,9) [12,0]	20,6 (20,9) [20,0]	3,9 (-1,7) [12,0]	20,3 (18,8) [20,0]	11,5 (11,9) [20,0]	42,0 (41,1) [40,0]	12,3 (12,6) [20,0]	41,2 (40,3) [40,0]
45	-4,8 (-6,6) [-8,0]	-13,1 (-13,1) [-10,0]	x (x) [x]	x (x) [x]	x (x) [x]	x (x) [x]	x (x) [x]	x (x) [x]

Tab. 8: Geschätzte Blockverschiebung in [cm] für ein Teilnetz. Zum Vergleich sind in runden Klammern () die Ergebnisse von Heck (1983) angegeben.

Epoche	1-2A		1-2B		1-3A		1-3B	
Teilnetz	5, 11, 39, 41		3, 5, 11, 39, 41		3, 5, 11, 39, 41		3, 5, 11, 39, 41	
Parameter	T_y	T_x	T_y	T_x	T_y	T_x	T_y	T_x
	7,7 (7,5)	23,2 (23,3)	6,3 (6,4)	22,4 (22,3)	11,4 (11,4)	43,5 (43,4)	15,1 (15,2)	43,9 (43,8)

Caspary, W., Welsch, W.M. (1979): Seminar über Deformationsanalysen. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 4, ISSN: 0173-1009.

Förstner, W. (1979): Ein Verfahren zur Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 86, 11-12, S. 446-453.

Haas, R. (2013): The Onsala twin telescope project. In: Zubko, N., Poutanen, M.: Proceedings of the 21st Meeting of the European VLBI Group for Geodesy and Astronomy. Reports of the Finnish Geodetic Institute, 1, S. 61-66.

Haas, R., Wahlblom, J., Elgered, G. (2016): Coordinates at the Onsala Super Tide Gauge. Onsala Space Observatory. Interner Bericht, Fassung vom 25. Mai 2016.

Hahn, M., Heck, B., Jäger, R., Scheuring, R. (1989): Ein Verfahren zur Abstimmung der Signifikanzniveaus für allgemeine $F_{m,n}$ -verteilte Teststatistiken, Teil I: Theorie. ZfV – Zeitschrift für Vermessungswesen, 114, 5, S. 234-248.

Heck, B. (1981) Der Einfluß einzelner Beobachtungen auf das Ergebnis einer Ausgleichung und die Suche nach Ausreißern in den Beobachtungen. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 88, 1, S. 17-34.

Heck, B. (1983): Das Analyseverfahren des geodätischen Instituts der Universität Karlsruhe, Stand 1983. In: Welsch, W.M. (Hrsg.): Deformationsanalysen '83 – Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 9, ISSN: 0173-1009, S. 153-182.

Heck, B., Kuntz, E., Meier-Hirmer, B. (1977): Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 84, 3, S. 78-87.

Heinert, M., Ritter, B., Niemeier, W. (2004): Angepasste Methoden der Deformationsanalyse für die geodätischen Messungen in Südwestisland. zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, 129, 6, S. 399-406.

Heunecke, O., Kuhlmann, H., Welsch, W.M., Eichhorn, A., Neuner, H. (2013): Handbuch Ingenieurgeodäsie: Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. 2. Auflage, Wichmann, Heidelberg, ISBN: 978-3879074679, 2013.

Illner, I. (1983): Freie Netze und S-Transformation. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 90, 5, S. 157-170.

Illner, M. (2008): Konzept und Ergebnisse von Deformationsmessungen an der Linachtalsperre. zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement, 133, 5, S. 302-311.

Jäcklin, S. (2011): Vergleich der Auswertestrategien von Caplan und JAG3D für Deformationsmessungen. Bachelorarbeit, Frankfurt University of Applied Sciences, unveröffentlicht.

Jäger, R., Drixler, E. (1990): Deformationsanalyse – Verfahren am Geodätischen Institut der Universität Karlsruhe: Konzepte, Vergleiche, Software, Ausblick. Geodätisches Institut der Universität Karlsruhe, Interner Bericht, Fassung vom Februar 1990.

Jäger, R., Müller, T., Saler, H., Schwäble, R. (2005): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren – Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. Wichmann, Heidelberg, ISBN: 3-87907-370-8.

Kälber, S., Jäger, R. (2001): GPS-Based Online Control and Alarm System (GOCA). 10th FIG International Symposium on Deformation Measurements. 19.-22. März 2001, Orange, California.

Koch, K.R. (1975): Ein allgemeiner Hypothesentest für Ausgleichungsergebnisse. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN), 82, 10, S. 339-345.

Kok, J.J. (1983): Simuliertes Beobachtungsmaterial für das Testnetz zur Deformationsanalyse. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 9, ISSN: 0173-1009, S. 329-336.

Kunz, E., Schmitt, G. (1979): Analyse von Deformationsmessungen mit Hilfe relativer Fehlerellipsen. In: Caspary, W., Welsch, W.M. (Hrsg.): Seminar über Deformationsanalysen. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 4, ISSN: 0173-1009, S. 26-44.

- Lehmann, R., Lösler, M. (2016): Multiple Outlier Detection: Hypothesis Tests versus Model Selection by Information Criteria. *Journal of Surveying Engineering*, 142, 4, doi: 10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000189.
- Lösler, M., Eschelbach, C. (2014): Zur Bestimmung der Parameter einer räumlichen Affintransformation. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)*, 121, 7, S. 273–277.
- Mierlo, J. van (1982): Difficulties in Defining the Quality of Geodetic Networks. In: Borre, K., Welsch, W.M. (Hrsg.): *International Federation of Surveyors – FIG – Proceedings Survey Control Networks*. Schriftenreihe des Wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 7, ISSN: 0173-1009, S. 259–274.
- Niemeier, W. (2008): *Ausgleichsrechnung – Statistische Auswertemethoden*. 2. Auflage, de Gruyter, Berlin, ISBN: 978-3110190557.
- Pelzer, H. (1971): *Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 164, München.
- Schmitt, G. (1985): A Review of Network Designs: Criteria, Risk Functions, Design Ordering. In: Grafarend E.W., Sansò, F.: *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer, Berlin, S. 6–10.
- Sieg, D., Hirsch, M. (2000): Varianzkomponentenschätzung in ingenieurgeodätischen Netzen, Teil 1. Theorie. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten (AVN)*, 107, 3, S. 82–90.
- Sušić, Z., Batilović, M., Ninkov, T., Aleksić, I., Bulatović, V. (2015): Identification of Movements Using Different Geodetic Methods of Deformation Analysis. *Geodetski vestnik*, 59, 3, doi: 10.15292/geodetski-vestnik.2015.03.537-553, S. 537–553.
- Trimble (2007): *DiNi Digital Level, Datasheet*.
- Tsenkov, T., Gospodinov, S. (2002): Determination of 2D-tectonic deformations using affine transformation. *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 4, S. 262–264.
- Welsch, W.M., Zhang, Y. (1983): Einige Methoden zur Untersuchung kongruenter und affiner Beziehungen in geodätischen Überwachungsnetzen zur Ermittlung von Deformationen. In: Welsch, W.M. (Hrsg.): *Deformationsanalysen '83 – Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze*. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 9, ISSN: 0173-1009, S. 299–328.
- Welsch, W.M. (1983): *Deformationsanalysen '83 – Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze*. Schriftenreihe des wissenschaftlichen Studiengangs Vermessungswesen der Hochschule der Bundeswehr München, Heft 9, ISSN: 0173-1009.
- Wulf, T. (2014): *Lage- und Höheneinmessung von Instrumenten zur Meeresspiegelmessung am Onsala Space Observatory*. Bachelorarbeit, Frankfurt University of Applied Sciences, Chalmers University of Technology, unveröffentlicht.
- Velsink, H. (2015): On the deformation analysis of point fields. *Journal of Geodesy*, 89, 11, doi: 10.1007/s00190-015-0835-z, S. 1071–1087.

Adresse der Autoren

Michael Lösler | Cornelia Eschelbach
 Frankfurt University of Applied Sciences
 Laboratory for Industrial Metrology
 Nibelungenplatz 1, 60318 Frankfurt am Main, Deutschland
 michael.loesler@fb1.fra-uas.de | cornelia.eschelbach@fb1.fra-uas.de

Rüdiger Haas
 Chalmers University of Technology
 Department of Earth and Space Sciences, Onsala Space Observatory
 439 92 Onsala, Sweden
 rudiger.haas@chalmers.se

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.