

Ausgleichungsrechnung mit Gröbnerbasen

Thomas Fuhrmann und Gerhard Navratil

Zusammenfassung

Gröbnerbasen werden heute in vielen mathematischen Gebieten eingesetzt. Awange und Grafarend haben Gröbnerbasen verwendet um klassische Probleme der Geodäsie und Fotogrammetrie zu lösen – im Wesentlichen durch formale Substitution der transzendenten Winkelfunktionen und Quadrieren der Distanzfunktionen. In diesem Artikel wird eine rein algebraische Methode vorgestellt, basierend auf der von Wildberger entwickelten Rationalen Trigonometrie. Aufgrund ihrer algebraischen Natur eignet sich diese Trigonometrie besonders für den Einsatz von Gröbnerbasen. Es wird gezeigt, wie ebene geodätische Ausgleichungsaufgaben mit dieser Methode gelöst werden können.

Summary

Today Gröbnerbases are applied in many mathematical branches. Awange and Grafarend have applied Gröbnerbases to solve classical problems of Geodesy and Photogrammetry – in essence via formal substitutions of the transcendental angular functions and squaring of distance functions. In this article we will present a method that is entirely algebraic, based on Wildberger's Rational Trigonometry. Due to its algebraic nature this trigonometry is well suited for the application of

Gröbnerbases. We will show how planar geodetic adjustment problems can be solved with this method.

Schlüsselwörter: Methode der kleinsten Quadrate, Gröbnerbasen, Rationale Trigonometrie

1 Einleitung

Innerhalb der Geodäsie können die Computeralgebra-Methoden als Ergänzung zu den herkömmlichen Methoden neue Lösungswege eröffnen oder bestehende Lösungen vereinfachen. Der wichtigste Vorteil in der Anwendung dieser Methoden liegt darin, dass für die direkte Lösung der Ausgleichungsaufgabe keine Näherungslösung benötigt wird. Awange et al. demonstrieren die Lösungen einer Vielzahl an Problemen aus der Geodäsie, globaler Navigationssatellitensysteme (GNSS) und Fotogrammetrie unter Einsatz von Computer Algebra Systemen (CAS); unter anderem verwenden sie algebraische Methoden für die Lösung von eindeutig bestimmten Subsystemen beim sogenannten Gauß-Jacobi-Kombinationsansatz (Awange et al. 2010).

In nahezu allen Anwendungsfeldern der Geodäsie und Geoinformation treten überbestimmte Systeme auf. Die Methode der kleinsten Quadrate ist eine gängige Methode für die Lösung überbestimmter Systeme. Grundlage aller Berechnungen in der Ausgleichsrechnung ist ein funktionales Modell, das die mathematisch-funktionalen Zusammenhänge zwischen den Beobachtungen und den Parametern beschreibt. Basierend auf dem funktionalen Modell wird die im Sinne der L2-Norm optimale Lösung berechnet. Im Falle nicht-linearer funktionaler Beziehungen wird das funktionale Modell linearisiert und iterativ gelöst. Die Iteration wird mit einer gut gewählten Näherungslösung gestartet. In manchen Fällen ist eine Näherungslösung nicht genau genug bestimmbar, sodass das Iterationsverfahren zu einer falschen Lösung konvergiert oder überhaupt divergiert. Es stellt sich daher die Frage, ob die Ausgleichsaufgabe auch ohne Linearisierung gelöst werden kann. Eine Möglichkeit bietet die Anwendung algebraischer Algorithmen. Die bei Winkel- und Distanzbeobachtungen auftretenden Beobachtungsgleichungen der klassischen Trigonometrie eignen sich jedoch nicht für algebraische Algorithmen. Aus diesem Grund wird eine alternative algebraische Form von Trigonometrie verwendet – anstelle von Winkel und Distanz werden die rationalen Werte *Quadrantz* (eigene Übersetzung, engl. quadrance) und *Spreizung* (eigene Übersetzung, engl. spread) verwendet (siehe folgender Abschnitt).

Nach einer kurzen, an den praktischen Anforderungen orientierten Einführung in die Thematik, wird die algebraische Modellbildung behandelt und daran anschließend werden zwei numerische Beispiele gezeigt.

2 Vorhergehende Arbeiten

Gröbnerbasen sind ein Werkzeug aus dem mathematischen Bereich der kommutativen Algebra, das ursprünglich für die Berechnung von polynomialen Normalformen in Quotientenringen von Bruno Buchberger entwickelt wurde (Buchberger 1970). Polynomiale Systeme mit endlich vielen Lösungen können mit dem Buchberger-Algorithmus gelöst werden, indem eine Gröbnerbasis *lexikografischer* Ordnung berechnet wird. Die resultierende Gröbnerbasis bildet ein polynomiales Dreieckssystem, dessen Lösungen rekursiv, beginnend mit einem univariaten Polynom dieses Dreieckssystems, bestimmt werden. Die Lösung eines komplexeren polynomialen Systems wird somit auf die mathematisch einfachere Lösung univariater Polynome zurückgeführt (Greuel und Pfister 2007). Univariate Polynome werden mit numerischen Algorithmen oder, bei Polynomen mit höchstem Grad kleiner gleich Vier, symbolisch gelöst. Das Problem besteht darin, dass die Gröbnerbasis lexikografischer Ordnung oftmals nicht oder nur sehr schwer berechenbar ist (der Buchberger-Algorithmus hat im worst case eine doppelt exponentielle Laufzeit). Der Gröbnerwalk-Algorithmus ist eine Alternative zum Buchberger-Algorithmus. Aus-

gehend von einer Gröbnerbasis einer einfacher zu berechnenden Monomordnung (in der Regel handelt es sich um die *invers-graduiert-lexikografische* Ordnung) wird die Gröbnerbasis in der Zielordnung (zum Beispiel die lexikografische Ordnung) berechnet (Fukuda et al. 2007). Der Gröbnerwalk-Algorithmus terminiert oftmals noch in vernünftiger Zeit, auch wenn der Buchberger-Algorithmus fehlschlägt. Sowohl der Buchberger- als auch der Gröbnerwalk-Algorithmus sind in vielen gängigen kommerziellen und Open Source Computer Algebra Systemen (CAS) implementiert – zum Beispiel Mathematica, Maple, MUPAD, Magma, Matlab und einer Vielzahl anderer auch nicht-kommerzieller Systeme.

Die rationale Trigonometrie ist eine von Norman Wildberger entwickelte algebraische Form von Trigonometrie. Diese Trigonometrie basiert auf der Überlegung, dass die theoretische Entwicklung der Trigonometrie und praktische Lösung von Dreiecken auch ohne die bekannten transzendenten Winkelfunktionen, deren Inversen und euklidischen Distanzen möglich ist. Anstelle der (näherungsweise) linearen Größen Winkel und Distanz werden die quadratischen Größen Quadrantz und Spreizung verwendet (Wildberger 2005). Aufgrund ihrer quadratischen Natur kann diese Trigonometrie, ob affin oder projektiv, über beliebigen Körpern mit Charakteristik ungleich Zwei entwickelt werden. Für geodätische Anwendungen ist der Körper der rationalen Zahlen von primärem Interesse. Die zu den klassischen Theoremen wie zum Beispiel Satz von Pythagoras, Sinus- und Cosinussatz äquivalenten Theoreme der rationalen Trigonometrie werden durch algebraische Gleichungen ausgedrückt. Diese Trigonometrie eignet sich daher besonders für algebraische Algorithmen.

Quadrantz misst die Entfernung zweier Punkte und Spreizung misst den Abstand zweier Linien (sinngemäß übersetzt, sowie weitere Passagen, nach Wildberger 2005). Zwischen der klassischen und der rationalen Trigonometrie besteht der folgende Zusammenhang:

$$\text{Quadrantz} = (\text{Distanz})^2, \tag{1}$$

$$\text{Spreizung} = (\sin(\text{Winkel}))^2. \tag{2}$$

Mathematisch gesehen ist Quadrantz eine elementarere Größe als Distanz, weil für deren Berechnung keine Wurzelfunktion benötigt wird – für die Quadrantz $Q(A_1, A_2)$ zweier Punkte $A_1 \equiv [x_1, y_1]$ und $A_2 \equiv [x_2, y_2]$ gilt:

$$Q(A_1, A_2) \equiv (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \tag{3}$$

Die Spreizung zweier Geraden $l_1 = a_1x + b_1y + c_1$ und $l_2 = a_2x + b_2y + c_2$ ist eine rationale Funktion:

$$s(l_1, l_2) \equiv \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}. \tag{4}$$

Die Spreizung zweier Geraden ist eine dimensionslose Größe, die über dem Körper der rationalen Zahlen zwi-

schen 0 und 1 variiert, wobei parallele Geraden eine Spreizung von 0 und orthogonale Geraden eine Spreizung von 1 haben. Die Spreizung eines Winkels und seines komplementären Winkels sind ident.

Anstelle der unorientierten Spreizung wird für orientierte Dreiecke die *Drehung* (engl. turn) verwendet. Die Drehung zweier Geraden ist wieder über eine Funktion der klassischen Trigonometrie mit dem Winkel assoziiert:

$$\text{Drehung} = \tan(\text{Winkel}). \quad (5)$$

Die Drehung $u(l_1, l_2)$ zweier nicht-orthogonaler Geraden $l_1 = a_1x + b_1y + c_1$ und $l_2 = a_2x + b_2y + c_2$ ist definiert als:

$$u(l_1, l_2) \equiv \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1a_2 + b_1b_2}. \quad (6)$$

Im Gegensatz zur Spreizung spielt bei der Drehung die Reihenfolge der Geraden eine Rolle – vertauscht man die Reihenfolge, so ändert sich das Vorzeichen, eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn ist positiv, andernfalls negativ.

3 Gröbnerbasen – eine kurze Einführung

In diesem Abschnitt wird die praktische Anwendung von Gröbnerbasen für die Lösung polynomialer Systeme demonstriert. Auf den theoretischen Hintergrund wird hier nicht näher eingegangen, dem interessierten Leser bieten Greuel und Pfister (2007) und Cox et al. (1997) eine gute Einführung in die Thematik. Dieses einführende Beispiel dient ausschließlich zur Demonstration der Methodik. Gegeben ist ein polynomiales System:

$$f_1 = x^2 - 2y^2, \quad (7)$$

$$f_2 = xy - 2. \quad (8)$$

Die beiden Polynome erzeugen ein *Ideal* im Polynomring mit den zwei Unbestimmten x und y . Als zugrunde liegender Körper wird der Körper der rationalen Zahlen verwendet – rationale Zahlen haben den Vorteil, dass alle Berechnungen exakt sind. Die Gröbnerbasis lexikografischer Ordnung ist:

$$[g_1, g_2] = [-2 + y^4, x - y^3]. \quad (9)$$

Die Nullstellen dieses Systems sind nun einfach zu ermitteln. Es gibt insgesamt vier Lösungen über dem Körper $\text{Rat}(\sqrt[4]{2}, i)$ – Zahlen vom Typ $a + bi$, mit $a = c + d\sqrt[4]{2}$ und $b = e + f\sqrt[4]{2}$ (c, d, e und f rationale Zahlen) und $i^2 = -1$. Die vier Lösungen sind, wenn zuerst die Lösungen des Polynoms g_1 berechnet und dann in das Polynom g_2 substituiert werden:

$$[2^{3/4}, -2^{1/4}], [-i2^{3/4}, i2^{1/4}], [i2^{3/4}, -i2^{1/4}], [2^{3/4}, 2^{1/4}]. \quad (10)$$

4 Gröbnerbasen in der Ausgleichsrechnung

In diesem Abschnitt wird kurz auf das Gauß-Markov-Modell (GMM) im Kontext der algebraischen Modellbildung eingegangen. Die Beobachtungsgleichungen sind oftmals nicht-linear, für eine Lösung mittels Gröbnerbasen müssen algebraische Beobachtungsgleichungen aufgestellt werden. Transzendente Funktionen können zum Beispiel durch Substitution einer polynomialen Variablen algebraisiert werden (Awange et al. 2010). Anstelle dieser formalen Substitution wird eine Modellierung mit den Werkzeugen der rationalen Trigonometrie vorgestellt. Die Beobachtungsgleichungen für den vermittelnden Ausgleich lauten:

$$L_i + v_i = f_i(\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \dots, \widehat{X}_u) \text{ für } i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

wobei n die Anzahl der Beobachtungen L_i ist, v_i die Verbesserung der i -ten Beobachtung ist und die Funktionen f_i rationale Funktionen in den u Unbekannten X_i beziehungsweise deren Schätzwerten \widehat{X}_i sind. Es wird vereinfachend von gleichartigen, gleich genauen und stochastisch unabhängigen Beobachtungen ausgegangen. Nach der Methode der kleinsten Quadrate soll die Summe der Verbesserungsquadrate minimiert werden. Mit $\vec{v} \equiv (v_1, v_2, \dots, v_n)$ gilt:

$$\Omega \equiv \vec{v} \cdot \vec{v}^T \rightarrow \min. \quad (12)$$

Die Extremwerte der Funktion Ω sind die gemeinsamen Nullstellen der partiellen Ableitungen nach den u Unbekannten. Die Gleichungen dieses polynomialen Gleichungssystems sind vom Grad $2l - 1$, wenn die Verbesserungsgleichungen vom Grad l sind (Awange et al. 2010). Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems in u Unbekannten sind symbolisch. Eine generische Lösung mit symbolischen Koeffizienten hat den Vorteil, dass die Lösung einer Ausgleichsaufgabe durch Substitution der Beobachtungsdaten sehr effizient ausgewertet werden kann. Sollte eine Lösung mit symbolischen Koeffizienten nicht möglich sein, müssen vor der Anwendung des Buchberger-Algorithmus die symbolischen Koeffizienten durch Substitution der Beobachtungsdaten in numerische Koeffizienten umgewandelt werden.

5 Genauigkeiten a posteriori

Die Genauigkeiten a posteriori der Unbekannten können via Fehlerfortpflanzungsgesetz berechnet werden. Ausgehend vom polynomialen System der partiellen Ableitungen der Verbesserungsquadratsumme:

$$\vec{f} \equiv \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X_1}, \frac{\partial \Omega}{\partial X_2}, \dots, \frac{\partial \Omega}{\partial X_u} \right)^T \quad (13)$$

wird die Fehlerfortpflanzung von den Beobachtungen nach den Unbekannten berechnet. Die Kovarianzmatrix der ausgeglichenen Unbekannten lautet dann (Awange et al. 2010):

$$\Sigma_{XX} = J_X^{-1} J_L \Sigma_{LL} J_L^T (J_X^{-1})^T, \quad (14)$$

wobei J_X und J_L die Jacobimatrizen der partiellen Ableitungen des Vektors \vec{f} nach den Unbekannten beziehungsweise den Beobachtungen sind.

6 Distanzbeobachtungen

Die Koordinaten eines Neupunktes $U \equiv [x_U, y_U]$ können durch Distanzbeobachtungen von mindestens zwei koordinativ bekannten Punkten bestimmt werden. Bei mehr als zwei Beobachtungen wird die Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die Distanzbeobachtungen sind nicht-linear und werden in der klassischen Ausgleichsrechnung in der Umgebung eines Näherungspunktes linearisiert und iterativ gelöst (Ghilani 2010). In Awange et al. (2003) werden Distanzbeobachtungen durch Quadrieren der Beobachtungsgleichungen algebraisiert. Die quadrierten Distanzen entsprechen genau den Quadranten der rationalen Trigonometrie. Mit der beobachteten Quadranten $Q_{i,j} \equiv Q(A_i, A_j)$ zwischen den Punkten $A_i \equiv [x_i, y_i]$ und $A_j \equiv [x_j, y_j]$ gilt für die Verbesserungsgleichungen:

$$v_{i,j} \equiv (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - Q_{i,j}. \quad (15)$$

Es muss berücksichtigt werden, dass sich durch das Quadrieren der Distanzbeobachtungen $d_{i,j}$ die Beobachtungsvarianzen in linearer Näherung ändern zu:

$$\sigma_{Q_{i,j}}^2 = 4Q_{i,j} \sigma_{d_{i,j}}^2. \quad (16)$$

Die Gewichtsmatrix P ist eine Diagonalmatrix mit den Inversen der Varianzen der Quadranten in der Diagonalen. Partielles Ableiten der mit P gewichteten Verbesserungsquadratsumme nach den unbekanntem Neupunktskoordinaten ergibt ein polynomiales Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_U} = S_1 x_U^3 + S_2 x_U^2 + S_3 x_U y_U^2 + S_4 x_U y_U + S_5 x_U + S_6 y_U^2 + S_7 y_U + S_8, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_U} = T_1 x_U^2 y_U + T_2 x_U^2 + T_3 x_U y_U + T_4 x_U + T_5 y_U^3 + T_6 y_U^2 + T_7 y_U + T_8. \quad (18)$$

Die symbolischen Koeffizienten S_i und T_i sind rationale Funktionen in den Koordinaten x_i und y_i der Standpunkte und den Quadranten $Q_{i,j}$. Die symbolischen Koeffizienten

werden bei gegebenen Daten numerisch ausgewertet und das Gleichungssystem wird mit dem Buchberger-Algorithmus gelöst. Die Lösung geringsten Residuums Ω sind die ausgeglichenen Neupunktskoordinaten.

7 Winkelbeobachtungen

In Awange (2002) werden Winkelbeobachtungen durch formale Substitution der transzendenten Winkelfunktion \tan gelöst. Die Lösung mittels der Formeln für die

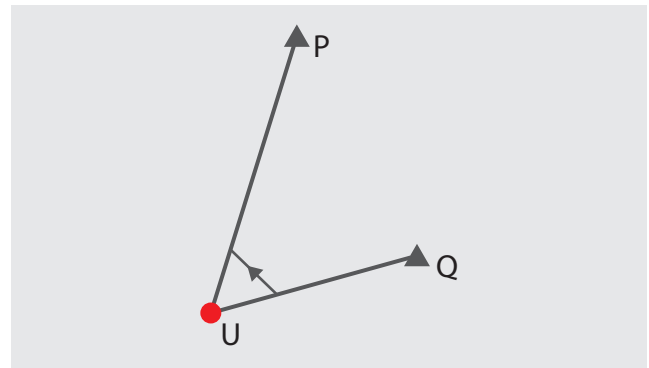


Abb. 1: Drehung beobachtet am Punkt U von Punkt Q zu P

Drehungen basiert auf rationalen Funktionen, wodurch die formale Substitution der Winkelfunktion obsolet wird. Im Gegensatz zur Lösung in Awange (2002) wird bei der hier gezeigten Lösung die Orientierung nicht explizit als Unbekannte mitgeführt. Die Beobachtungsgleichungen für Winkelbeobachtungen von einem Neupunkt $U \equiv [x_U, y_U]$ ergeben sich aus der Formel für die Drehung. Bei gegebenen drei Punkten $P \equiv [x_P, y_P]$, $U \equiv [x_U, y_U]$ und $Q \equiv [x_Q, y_Q]$ (s. Abb. 1), gilt für die Drehung $u(Q, U, P)$ in mathematisch positiver Richtung:

$$u(Q, U, P) = \frac{(x_U - x_P)(y_Q - y_U) - (y_P - y_U)(x_U - x_Q)}{(x_U - x_P)(x_U - x_Q) + (y_P - y_U)(y_Q - y_U)}. \quad (19)$$

Die Verbesserungsgleichung der Beobachtung $u_{Q,U,P}$ wird durch Multiplikation mit dem Nenner der Drehung in eine polynomiale Form gebracht:

$$v(Q, U, P) \equiv (x_U - x_P)(y_Q - y_U) - (y_P - y_U)(x_U - x_Q) \quad (20)$$

$$-u_{Q,U,P} \left((x_U - x_P)(x_U - x_Q) + (y_P - y_U)(y_Q - y_U) \right). \quad (21)$$

Die partiellen Ableitungen der ungewichteten Verbesserungsquadratsumme nach den unbekanntem Neupunktskoordinaten ergeben ein polynomiales Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_U} = S_1 x_U^3 + S_2 x_U^2 + S_3 x_U y_U^2 + S_4 x_U y_U + S_5 x_U + S_6 y_U^2 + S_7 y_U + S_8, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_U} = T_1 x_U^2 y_U + T_2 x_U^2 + T_3 x_U y_U + T_4 x_U + T_5 y_U^3 + T_6 y_U^2 + T_7 y_U + T_8. \quad (23)$$

Die symbolischen Koeffizienten werden bei gegebenen Daten numerisch ausgewertet und das Gleichungssystem wird mit dem Buchberger-Algorithmus gelöst. Die Lösung des geringsten Residuums Ω ist die gesuchte Lösung. Es muss in einem zweiten Schritt berücksichtigt werden, dass sich die Varianzen der Beobachtungen durch die Multiplikation mit dem Nenner der Drehung verändern, mit $s_{Q,U,P} \equiv \sin(\alpha_{Q,U,P})^2$ gilt in linearer Näherung:

$$\sigma_{Q,U,P}^2 \equiv \frac{\left((x_U - x_P)(x_U - x_Q) + (y_P - y_U)(y_Q - y_U) \right)^2}{(1 - s_{Q,U,P})^2} \sigma_{\alpha_{Q,U,P}}^2. \quad (24)$$

Mit den Neupunktskoordinaten von $U \equiv [x_U, y_U]$ und den gegebenen Daten werden die Varianzen berechnet und mit deren Inversen wird die Gewichtsmatrix P gebildet. Nun wird der erste Schritt mit der mit P gewichteten Verbesserungsquadratsumme wiederholt.

8 Beispiel: Bogenschnitt

Das folgende Beispiel ist aus Ghilani (2010). Von drei bekannten Standpunkten mit Koordinaten in Meter $A \equiv [x_A, y_A] = [263.775, 1379.878]$, $B \equiv [x_B, y_B] = [741.443, 624.003]$ und $C \equiv [x_C, y_C] = [873.321, 8.275]$ wurden die Distanzen in Meter zu einem unbekanntem Punkt $U \equiv [x_U, y_U]$ gemessen (s. Abb. 2), gesucht sind die ausgeglichenen Neupunktskoordinaten. In der Tab. 1 sind bereits die Quadranzen anstelle der Distanzen eingetragen.

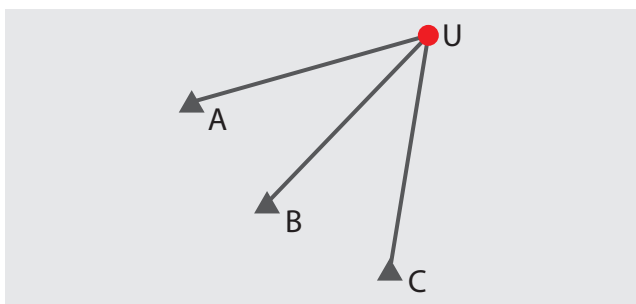


Abb. 2: Distanzbeobachtungen von den bekannten Punkten A, B und C zu U

Tab. 1: Distanzbeobachtungen

Standpunkt	Zielpunkt	Quadranz $Q_{i,j}$
A	U	3.3993731×10^6
B	U	2.0845257×10^6
C	U	2.7559103×10^6

Die Verbesserungsgleichung der Punkte A und U ist die Differenz der Quadranz $Q(A,U)$ und der beobachteten Quadranz $Q_{A,U}$, analoge Gleichungen gelten für die beiden anderen Beobachtungen mit den Indizes entsprechend vertauscht:

$$v_{A,U} \equiv (x_U - x_A)^2 + (y_U - y_A)^2 - Q_{A,U}. \quad (25)$$

Die Varianz verändert sich durch das Quadrieren der Distanz gemäß Fehlerfortpflanzungsgesetz zu:

$$\sigma_{Q_{A,U}}^2 = 4Q_{A,U}. \quad (26)$$

Mit der Gewichtsmatrix

$$W \equiv \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_{Q_{A,U}}}, \frac{1}{\sigma_{Q_{B,U}}}, \frac{1}{\sigma_{Q_{C,U}}} \right) \quad (27)$$

wird die gewichtete Verbesserungsquadratsumme gebildet, deren partielle Ableitungen ein polynomiales Gleichungssystem bilden. Die Lösung geringsten Residuums Ω ist: $\hat{U} = [2091.33, 1136.24]$. Diese Lösung stimmt mit jener der klassischen Ausgleichsrechnung überein.

9 Beispiel: Rückwärtsschnitt

Das folgende Beispiel ist aus Ghilani (2010) entnommen. Gegeben sind vier Festpunkte mit Koordinaten in Meter: $P \equiv [397.338, 444.587]$, $Q \equiv [498.787, 399.431]$, $R \equiv [458.236, 270.773]$ und $S \equiv [459.110, 239.287]$ und ein Neupunkt $U \equiv [x_U, y_U]$, von dem aus drei Winkel beobachtet wurden (s. Abb. 3).

Die Beobachtungsgleichung für die erste Beobachtung sieht folgendermaßen aus, für die beiden anderen Beobachtungen gelten analoge Gleichungen mit den Indizes entsprechend vertauscht:

$$v_{Q,U,P} \equiv (x_U - x_P)(y_Q - y_U) - (y_P - y_U)(x_U - x_Q) \quad (28)$$

$$-u_{Q,U,P} \left((x_U - x_P)(x_U - x_Q) + (y_P - y_U)(y_Q - y_U) \right). \quad (29)$$

Mit den drei Verbesserungsgleichungen wird die ungewichtete Verbesserungsquadratsumme Ω gebildet und partiell nach den beiden Neupunktkoordinaten abgeleitet – das Resultat ist ein polynomiales System mit zwei Gleichungen. Dieses System wird mit dem Gröbnerbasis-Algorithmus gelöst und aus den fünf Lösungen wird die Lösung geringsten Residuums gewählt: $\hat{U} = [x_U, y_U] = [1000.005, 1000.010]$. Das ist die erste Näherung für die Neupunktkoordinaten, im zweiten Schritt wird die gewichtete Lösung berechnet. Es gilt zu beachten, dass sich die gegebenen Varianzen der Winkel in linearer Näherung gemäß Fehlerfortpflanzungsgesetz verändern, für

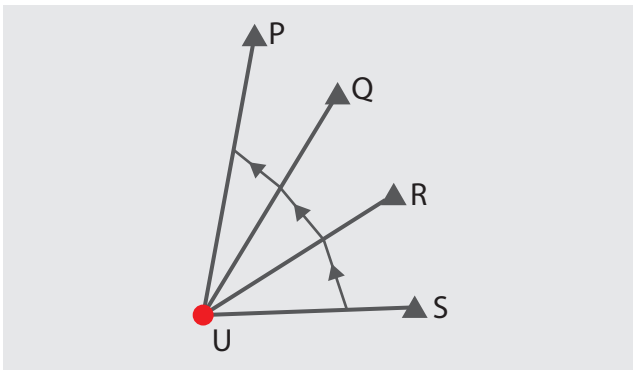


Abb. 3: Drehungen beobachtet von Punkt U

Tab. 2: Winkelbeobachtungen

Rückblick	Standpunkt	Vorblick	Drehung $u_{l,j,k}$	σ''
Q	U	P	$\tan\left(\frac{12197^\circ}{400}\right)$	5
R	U	Q	$\tan\left(\frac{138631^\circ}{3600}\right)$	6
S	U	R	$\tan\left(\frac{12599^\circ}{1200}\right)$	6

die Varianz der ersten Beobachtung gilt mit der Spreizung $s_{Q,U,P} \equiv \sin(\alpha_{Q,U,P})^2$:

$$\sigma_{u_{Q,U,P}}^2 \equiv \frac{((x_U - x_P)(x_U - x_Q) + (y_P - y_U)(y_Q - y_U))^2}{(1 - s_{Q,U,P})^2} \sigma_{\alpha_{Q,U,P}}^2 \quad (30)$$

In die Gleichungen der Varianzen werden die Koordinaten für den Neupunkt U aus der ersten Ausgleichung eingesetzt. Mit der Gewichtsmatrix

$$W \equiv \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_{u_{Q,U,P}}^2}, \frac{1}{\sigma_{u_{R,U,Q}}^2}, \frac{1}{\sigma_{u_{S,U,R}}^2}\right) \quad (31)$$

wird die optimale Lösung der gewichteten Verbesserungsquadratsumme berechnet und die Neupunktkoordinaten sind: $\hat{U} = [x_U, y_U] = [304.800, 304.808]$. Das ist die Lösung der Ausgleichungsaufgabe, die mit der klassischen Lösung übereinstimmt.

10 Conclusio

Dieser Artikel sollte einen kompakten Einblick in die Anwendung rationaler Trigonometrie in Kombination mit den verfügbaren Werkzeugen aus der Computeralgebra auf geodätische Aufgabenstellungen geben. Die gezeigten

Ergebnisse der Ausgleichung sind äquivalent zu den Lösungen der klassischen Ausgleichsrechnung. Die Komplexität des polynomialen Systems hängt von der Anzahl der Unbekannten ab, nicht jedoch von der Anzahl der Beobachtungen – die Daten bleiben sozusagen in den Koeffizienten des Gleichungssystems versteckt. Es wurde angenommen, dass keine Korrelationen zwischen den Beobachtungen existieren – korrelierte Beobachtungen würden eine Komplexitätssteigerung des polynomialen Systems bedeuten. Es bleibt zu untersuchen, inwiefern sich die hier vorgestellten Methoden für größere geodätische Ausgleichungsaufgaben oder dreidimensionale GNSS-Ausgleichungen eignen. Eine Lösung mit symbolischen Koeffizienten ist wünschenswert und für einfachere Aufgaben zu erreichen. Problematisch ist die hohe Anzahl an symbolischen Koeffizienten, die eine Lösung ohne vorhergehende numerische Auswertung der Koeffizienten erschweren. In den Beispielen wurde nicht auf die Genauigkeiten a posteriori eingegangen. Die Genauigkeiten a posteriori der Unbekannten sowie der ausgeglichenen Beobachtungen können mittels Fehlerfortpflanzung der Beobachtungsgleichungen berechnet werden (Awange et al. 2010). Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Gröbnerbasen in Kombination mit rationaler Trigonometrie für manche Aufgaben eine Alternative zu den herkömmlichen Methoden bieten.

Literatur

- Awange, J.L.: Groebner basis solution of planar resection problem. Survey Review, 36(285):528–543, 2002.
- Awange, J.L., Grafarend, E.W., Fukuda, Y., Takemoto, S.: Direct polynomial approach to nonlinear distance (ranging) problems. Earth Planets and Space, 55(5):231–242, 2003.
- Awange, J.L., Grafarend, E.W., Paláncz, B., Zaletnyik, P.: Algebraic Geodesy and Geoinformatics. Springer, 2010.
- Buchberger, B.: Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. Aequationes mathematicae, 4(3):374–383, 1970.
- Cox, D.A., Little, J.B., O’Shea, D.B.: Ideals, Varieties and Algorithms. Springer, 1997.
- Fukuda, K., Jensen, A.N., Lauritzen, N., Thomas, R.: The generic Gröbner walk. Journal of Symbolic Computation, 42(3):298–312, 2007.
- Ghilani, C.D.: Adjustment Computations. Wiley, 2010.
- Greuel, G., Pfister, G.: A Singular Introduction to Commutative Algebra. Springer, 2007.
- Wildberger, N.J.: Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry. Wild Egg Pty Ltd, 2005.

Anschrift der Autoren

Dipl.-Ing. Thomas Fuhrmann
 Priv. Doz. Dipl.-Ing. Dr. techn. Gerhard Navratil
 Vienna University of Technology, Department of Geodesy and Geoinformation, Research Group Geoinformation
 Gusshausstrasse 27–29, 1040 Wien, Österreich
 Tel.: +43 1 58801 12711 | Fax: +43 1 58801 12799
 fuhrmann@geoinfo.tuwien.ac.at
 navratil@geoinfo.tuwien.ac.at

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.