1609 – 2009: 400 Jahre Keplersche Gesetze

Manfred Schneider und Jürgen Müller

Zusammenfassung

Die Keplerschen Planetengesetze stellen die Lösung des Kepler-Problems dar, das der Prototyp des streng lösbaren Bewegungsproblems in der Himmelsmechanik ist und Ausgangspunkt zahlreicher Bahntheorien für die Planetenbewegungen, die Bewegungen der natürlichen Monde sowie der künstlichen Satelliten und Raumsonden. An die Veröffentlichung dieser Gesetze vor 400 Jahren durch Johannes Kepler (Bialas 2004, Caspar 1958) wird erinnert und es werden die Voraussetzungen für ihr Bestehen aufgezeigt.

Summary

Kepler's laws for the planets represent a general solution of the so-called Keplerian problem which is a prototype of the straightforward solution of the equations of motion in celestial mechanics. It is the starting point of various orbital theories for planetary motions, the translational motion of the moons as well as of artificial satellites and interplanetary spacecraft. Here, we want to remind in the publication of these laws by Johannes Kepler (Bialas 2004, Caspar 1958) 400 years ago and discuss conditions for their further use.

1 Motivation

In diesem Jahr können zwei Ereignisse gefeiert werden: Zum einen wird mit dem internationalen Jahr der Astronomie 2009 (IYA2009) die Astronomie und ihr Beitrag zur Gesellschaft und Kultur weltweit gewürdigt. 2009 markiert auch den 400sten Geburtstag des erstmaligen Gebrauchs eines astronomischen Teleskops durch Galileo Galilei 1609.

Zum anderen jährt sich 2009 das Erscheinen der *Astronomia Nova* von Johannes Kepler (Kepler 1929) zum 400sten Mal. Darin finden sich die beiden ersten Keplerschen Gesetze über die Planetenbewegung:

- Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- Der Fahrstrahl von der Sonne zu einem Planeten beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenstücke.

Anm.: Sie werden häufig in der umgekehrten Reihenfolge genannt.

Dort findet sich auch eine Aufgabenbeschreibung des wahren Astronomen, nämlich

> *»... physikalische Prinzipien auszudenken, aus denen man die Bahnen ableiten kann, welche mit den aus den Beobachtungen übermittelten übereinstimmen ...«*

Dies ist im Einklang mit dem vollen Buchtitel *Astronomia Nova αιτιολογητος, seu Physica Coelestis, tradita commentariis de Motibus stellae Martis* – also »Neue Astronomie ursächlich begründet oder die Physik des Himmels – dargestellt in Untersuchungen über die Bewegungen des Sternes Mars« (Kepler 1929). In diesem Buch beschreibt Kepler in allen Einzelheiten den äußerst mühevollen Weg von der gleichförmigen Bewegung in Kreisen, an der Copernicus noch festgehalten hat (Copernicus 1972), zur ungleichmäßig schnellen Bewegung in elliptischen Bahnen. Kepler verfügt nach Maßgabe der erheblich verfeinerten Planetenbeobachtungen Tycho de Brahes über die Bahn der Himmelskörper. An die Stelle der Platonschen Vorstellung der Kreisbahnen treten die Keplerschen Planetengesetze, die Bahnform und Bahngeschwindigkeit gesetzlich fassen. Kepler hat das Ergebnis seiner – in heutiger Sprechweise – kinematischen Bahnbestimmung noch nicht aus einer Dynamik heraus begründen können, wenngleich er in der Astronomia Nova bereits die Vermutung einer Anziehungskraft der Sonne auf jeden Planeten äußert, die umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes Planet–Sonne ist und die für die elliptische Bahnbewegung der Planeten verantwortlich sei. Weitere Hinweise auf wesentliche Elemente einer aufkommenden Dynamik finden sich in Briefen Keplers (Bialas 2004).

So schreibt er am 11. Oktober 1605 an den Pfarrer David Fabricius (Kepler 1937 ff, KGW XV):

> *»Wenn man einen Stein hinter die Erde setzen und den Fall annehmen würde, daß beide von jeder anderen Bewegung frei sind, so würde nicht nur der Stein auf die Erde zueilen, sondern auch die Erde auf den Stein zu; sie würden den zwischenliegenden Raum im umgekehrten Verhältnis ihrer Gewichte teilen«.*

Hier deuten sich das Reaktionsprinzip Newtons (Newton 1963) wie auch das Fallgesetz Galileis an. Und am 4. Oktober 1607 schrieb Kepler (Kepler 1937 ff, KGW XVI) an den Arzt Brenngger den Flächensatz betreffend:

> *»Im Übrigen ziehe ich Flächen heran, die der Planet bei seinem Umlauf beschreibt; in diesen suche ich die Stärke und Schwäche der zu den Bewegungen aufgewendeten Kräfte«.*

Einige Monate vorher hatte er an Herwart von Hohenburg bezüglich dieser Kräfte geschrieben (Kepler 1937 ff, KGW XVI), dass er sie nicht der Analogie halber magnetische hätte nennen sollen, sondern (Bialas 2004, Goldberg 1980)

> *»... eine himmlische Kraft hätte nennen sollen«.*

In dem schon erwähnten Brief an Fabricius schreibt Kepler zur Bahnform:

> *»Die Planetenbahn ist eine vollkommene Ellipse (die Dürer oft Oval nennt) oder sicherlich nur um einen unmerklichen Betrag von einer solchen verschieden«.*

Das dritte der Planetengesetze hat Kepler am 15. Mai 1618 entdeckt und ist in seinem Werk *Harmonice Mundi* von 1619 enthalten (Kepler 1978):

- Die Kuben der mittleren Abstände der Planeten von der Sonne verhalten sich wie die Quadrate der Umlaufszeiten.

Diese drei Planetengesetze, auf der Grundlage der Planetenbeobachtungen Tycho de Brahes aufgestellt, hat Isaac Newton in seinem Hauptwerk *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis* von 1687 (Newton 1963) aus seinem schon 1686 gefundenen Gravitationsgesetz und den drei Grundgesetzen der Bewegung hergeleitet.

2 Herleitung der Keplerschen Gesetze

Chandrasekhar (1995) hat Newtons Principia für den Laien aufbereitet und sich dabei an die Newton zur Verfügung gestandene Mathematik gehalten. Es wird hier deutlich, welche Schwierigkeiten es bereitet hat, die Planetengesetze Keplers aus dem Gravitationsgesetz Newtons zu begründen.

Eine Bewegungsgleichung wie sie heute verwendet wird, beispielsweise (Schneider 1992)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\mathbf{K}(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}};t)\ , \tag{1}$$

war Newton noch nicht bekannt. Sie wurde erst von Leonhard Euler (Szabo 1979) als Bestimmungsgleichung für die Bahn $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ aufgestellt. Der Ausgangspunkt für diese Bewegungsgleichung ist die von Newton formulierte Bilanzgleichung

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{K} \tag{2}$$

für den Impuls (Bewegungsgröße)

$$\mathbf{p}:=m\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \tag{3}$$

des Körpers mit der trägen Masse m und der Geschwindigkeit $d\mathbf{r}/dt$. $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ gibt den geometrischen Ort des Körpers zum Zeitpunkt t an. $\mathbf{K}=\mathbf{K}\left(\mathbf{r},\frac{d\mathbf{r}}{dt};t\right)$ ist die auf den Körper einwirkende Kraft, die häufig die Resultierende mehrerer Einzelkräfte ist, die sich nach dem Kräfteparallelogramm vektoriell zusammensetzen lassen, d.h. es gilt meist

$$\mathbf{K}=\sum_{i=1}^{I}\mathbf{K}_i\ . \tag{4}$$

Die Impulsbilanz ist neben dem Trägheitsgesetz Galileis und dem Reaktionsprinzip eines der drei Grundgesetze der Bewegung.

Anm.: In dem 1596 veröffentlichten Buch Weltgeheimnis (Mysterium Cosmographicum) von Kepler (1929) taucht der neue Gedanke auf,

> *»daß in der Sonne der Sitz einer Kraft ist, die die Planetenbewegung erzeugt, und die um so schwächer ist, je weiter ein Planet von der Quelle der Kraft entfernt ist. Er spricht zwar in seinem Buch von einer anima motrix, einer bewegenden Seele; allein schon in einem gleichzeitigen Brief gebraucht er dafür das Wort vigor, Kraft. Diese Idee birgt den ersten Keim der Himmelsmechanik in sich«* (Caspar 1958).

Daraus entsteht dann ein Jahrzehnt später die Astronomia Nova als Physica Coelestis.

Für die Relativbewegung $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ zweier Teilchen mit konstanten Massen m und $M_\otimes$ mit $m \ll M_\otimes$ besteht, nimmt man Newtonsche Gravitationswechselwirkung zwischen beiden an, die Bewegungsgleichung

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{mGM_\otimes}{r^3}\mathbf{r}\ . \tag{5}$$

Können G und $M_\otimes$ als Konstanten angenommen werden, dann ist das durch diese Bewegungsgleichung definierte Kepler-Problem streng lösbar, es ist integrabel. Das heißt, man findet die erforderliche Anzahl von sechs Bewegungsintegralen (Schneider I, 1992).

Nun gibt es aber Befunde, z.B. aus der Sonnenphysik und theoretischen Überlegungen, die auf eine Zeitveränderlichkeit beider Größen hinweisen, d.h. es ist anzunehmen

$$\frac{\partial G}{\partial t}\neq 0 \quad \text{und/oder} \quad \frac{\partial M_\otimes}{\partial t}\neq 0\ , \tag{6}$$

sodass sich die Frage stellt: Ist das verallgemeinerte Kepler-Problem

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\frac{mG(t)\,M_\otimes(t)}{r^3}\mathbf{r}=:\frac{m\mu(t)}{r^3}\mathbf{r} \tag{7}$$

mit $\mu(t):=G(t)\,M_\otimes(t)$ noch streng lösbar?

Es ist jedenfalls weiterhin eine Zentralkraft wirksam, sodass die Bewegung in einer unveränderlichen Bahnebene verlaufen wird. Bildet man nämlich das Vektorprodukt mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$, folgt nach dieser Momentenbildung (Schneider 1992)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\mathbf{r} = -\frac{m\mu(t)}{r^3}\mathbf{r}\times\mathbf{r} \tag{8}$$

und daraus

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{9}$$

bzw.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}\;. \tag{10}$$

Integriert man (10) unbestimmt über die Zeit t, erhält man

$$(\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}}) = \mathrm{N}_0 =: m\mathbf{C} \tag{11}$$

mit dem frei wählbaren Integrationsvektor $\mathbf{C}$. Danach bleibt der Bahndrehimpuls $\mathrm{N} := \mathbf{r}\times\mathbf{p}$ des Teilchens m erhalten, woraus man wegen der Orthogonalität der Vektoren $\mathbf{r}$ und $\mathbf{p}$ zum Bahndrehimpulsvektor N auf die Ebenheit der Bahnbewegung einerseits und den Umlaufsinn andererseits schließen kann. Es ist dies dasselbe Ergebnis wie im Fall von konstantem μ. Die Bahnneigung und die Knotenlage sind fest.

Wenn man andererseits die Bewegungsgleichung (7) skalar mit der Geschwindigkeit multipliziert, also eine Energiebilanz aufstellt, ergibt sich zunächst

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\dot{\mathbf{r}} = -\frac{m\mu(t)}{r^3}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}\;. \tag{12}$$

Mit der durch

$$T_{kin} := \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} \tag{13}$$

definierten kinetischen Energie des Teilchens m kann man umformen in

$$\frac{dT_{kin}}{dt} = -\frac{m\mu(t)}{r^3}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}\;. \tag{14}$$

Beachtet man

$$-\frac{m\mu(t)}{r^3}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = m\frac{\partial U_{kep}}{\partial\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} \tag{15a}$$

$$\text{mit}\quad U_{kep} := \frac{\mu(t)}{r}\,, \tag{15b}$$

was gleichbedeutend ist mit

$$m\frac{\partial U_{kep}(\mathbf{r},t)}{\partial\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}} = m\frac{dU_{kep}(\mathbf{r},t)}{dt} - m\frac{\partial U_{kep}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\,, \tag{16}$$

erhält man

$$\frac{dT_{kin}}{dt} = m\frac{dU_{kep}}{dt} - m\frac{\partial U_{kep}}{\partial t}$$
$$\Rightarrow \int_0^t \frac{dT_{kin}}{dt'}dt' = T_{kin} = \int_0^t\left[m\frac{dU_{kep}}{dt'} - m\frac{\partial U_{kep}}{\partial t'}\right]dt'\;. \tag{17}$$

Wenn nun $\mu(t) = \mu_0 = \text{const}$, dann ist $\partial U_{kep}/\partial t = 0$ und die Energiebilanz lautet

$$T_{kin} = \int_0^t\left[m\frac{dU_{kep}}{dt'}\right]dt' = mU_{kep} \tag{18}$$

oder umgestellt

$$T_{kin} - mU_{kep} = \text{const}\,. \tag{19}$$

Danach bleibt die Gesamtenergie E_{ges} aus kinetischer und der durch

$$V_{pot} := -mU_{kep} = -m\frac{GM_\otimes}{r} \tag{20}$$

erklärten potenziellen Energie erhalten:

$$T_{kin} + V_{pot} = E_{ges} = \text{const} =: E_0 = mh\;. \tag{21}$$

Die Energiekonstante E_0 (bzw. h) kann ausgedrückt werden durch die große Halbachse a der (elliptischen) Umlaufbahn

$$h = -\frac{GM_\otimes}{2a} < 0\;. \tag{22}$$

Sie ist ebenfalls konstant und ein Maß für die Gesamtenergie. Für a gilt

$$a = -\frac{GM_\otimes}{2h} \geq 0\;. \tag{23}$$

Wenn man andererseits die Bewegungsgleichung (7) auf beiden Seiten vektoriell mit dem Bahndrehimpulsvektor multipliziert (Schneider I, 1992)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\mathbf{C} = -\frac{m\mu(t)}{r^3}\mathbf{r}\times\mathbf{C} \tag{24}$$

und umformt entsprechend

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{C}) &= -\frac{\mu(t)\,\mathbf{r}}{r^3}\times(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}) = -\mu(t)\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r^3}r - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}\right)\\ &= \mu(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\end{aligned}\quad, \tag{25}$$

dann ergibt die unbestimmte Integration über die Zeit auf beiden Seiten:

$$\int_0^t \frac{d}{dt'}(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{C})\,dt' = \int_0^t \mu(t')\frac{d}{dt'}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)dt'$$

$$\Rightarrow (\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{C}) - \mathbf{A} = \int_0^t \mu(t')\frac{d}{dt'}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)dt'$$

$$= \int_0^t \left[\frac{d}{dt'}\left(\mu(t')\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right) - \frac{\partial\mu(t')}{\partial t'}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\right]dt \qquad (26)$$

oder umgestellt

$$(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{C}) = \mu(t')\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) - \int_0^t \frac{\partial\mu(t')}{\partial t'}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)dt' + \mathbf{A}\,. \qquad (27)$$

Darin ist A ein konstanter Integrationsvektor, der Runge-Lenz-Vektor. Wenn nun $\mu(t) = \mu_0 = \text{const}$, entfällt das unbestimmte Integral auf der rechten Seite und es ergibt sich das Laplace-Integral:

$$(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{C}) = \mu_0\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) + \mathbf{A}\,. \qquad (28)$$

Der Integrationsvektor A ist linear kombiniert aus den Vektoren $\mathbf{r}$ und $\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{C}$, die in der unveränderlichen Bahnebene liegen. Damit liegt auch A in der Bahnebene und wird dort meist so festgelegt, dass er vom Zentralkörper $M_\otimes$ zum umlaufenden Körper m zeigt, wenn dieser den geringsten Abstand hat, dem sogenannten Perizentrum der (elliptischen) Bahnkurve. Der Runge-Lenzvektor A (Schneider I, 1992) spannt demnach die Apsidenlinie, die durch Perizentrum und Apozentrum verläuft, auf.

Während also die Bahnebene auch bei veränderlichem $\mu(t)$ unverändert bleibt, d.h. der Bahnnormalenvektor $\mathbf{C}_0 := \mathbf{C}/|\mathbf{C}|$ fest bleibt, besteht kein Erhaltungssatz für die Gesamtenergie und es bleibt auch der Runge-Lenzvektor A nicht konstant. Die Folge ist, dass die Bahngleichung

$$r = \frac{p}{1+e\cos f}\,, \qquad (29)$$

die aus dem Laplace-Integral gewonnen wird (Schneider I, 1992), nicht unverändert gelten kann. In der Polargleichung der Ellipsenbahn (29) bedeutet

$$p := \frac{|\mathbf{C}|^2}{GM_\otimes} \qquad (30)$$

den Parameter und

$$e := \frac{|\mathbf{A}|}{GM_\otimes} \qquad (31)$$

die numerische Exzentrizität der elliptischen Bahnkurve, je ausgedrückt durch Integrationskonstanten. Die Unveränderlichkeit von $\mu(t) = \text{const}$ ist demnach unerlässlich, damit das erste der Keplergesetze über die Bahnform gilt. Aus der Konstanz des Bahndrehimpulses folgt andererseits das zweite Keplergesetz durch unbestimmte Integration von (11):

$$\int_0^t (\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}})\,dt' = \int_0^t \mathbf{N}_0\,dt' = \frac{1}{m}\int_0^t \mathbf{C}\,dt' = \frac{\mathbf{C}}{m}t\,. \qquad (32)$$

Beachtet man, dass für die Fläche $d\mathbf{f}$ des von den Ortsvektoren $\mathbf{r}(t)$ und $\mathbf{r}(t+dt)$ berandeten Bahnsektors gilt

$$d\mathbf{f} = \frac{1}{2}\mathbf{r}(t)\times(\mathbf{r}(t+dt)) \approx \frac{1}{2}\mathbf{r}(t)\times(\mathbf{r}(t)+\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt)$$
$$= \frac{1}{2}\mathbf{r}(t)\times\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt \qquad , \qquad (33)$$

ergibt sich für die Flächengeschwindigkeit aus der Drehimpulserhaltung

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{C}\,, \qquad (34)$$

also deren Konstanz, wie es das zweite Keplergesetz besagt. Das gilt offensichtlich unabhängig davon, ob $\mu(t) = \text{const}$ oder $\mu(t) \neq \text{const}$.

Es verbleibt noch das dritte Keplergesetz. Dazu geht man aus von der Beziehung

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = C \quad \text{mit} \quad C := |\mathbf{C}|\,. \qquad (35)$$

Sie erhält man, wenn man in der raumfesten Bahnebene ebene Polarkoordinaten r,φ einführt, Ort- und Geschwindigkeitsvektor dadurch ausdrückt und diese Darstellungen in den Drehimpulssatz einsetzt. Nach Trennung der Variablen, also $r^2 d\varphi = C dt$ und anschließender unbestimmter Integration folgt unter Verwendung der Bahngleichung $r = p/(1+e\cos f)$, der Polargleichung für Kegelschnitte, die Beziehung

$$C(t-t_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{p^2}{(1+e\cos(\varphi'-\varphi_0))}\,d\varphi'\,. \qquad (36)$$

Darin ist $(\varphi - \varphi_0) =: f$ die gegen die in der Bahnebene frei wählbare Bezugsrichtung φ_0 gezählte wahre Anomalie. φ_0 wird in der Regel so gewählt, dass die Bezugsrichtung mit der Apsidenlinie zusammenfällt.

Zur Auswertung des Integrals geht man bei (elliptischen) Bahnen zweckmäßig von der wahren zur exzentrischen Anomalie E mithilfe der Beziehungen (Schneider I, 1992)

$$\cos f = \frac{\cos E - e}{1-e\cos E} \quad \text{und} \quad \sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \qquad (37)$$

über. Damit lässt sich das obige Integral einfach auswerten und man erhält die Kepler-Gleichung

$$E - e\sin E = M\ . \tag{38}$$

Darin bedeuten $M := M_0 + n\,(t - t_0)$ die mittlere Anomalie und

$$n := \frac{C}{a^2\sqrt{1-e^2}} \tag{39}$$

die mittlere Bewegung, eine mittlere Winkelgeschwindigkeit in der elliptischen Umlaufbahn des Planeten. Der Winkel E wurde von Kepler eingeführt.

Wenn man jetzt über einen vollen Umlauf das Mittel der momentanen Abstände des Planeten von der Sonne bildet, also

$$\overline{r\,(E)} := \frac{1}{2\pi}\int_{E_0}^{E} r\,(E')\,de' = a\ , \tag{40}$$

sieht man, dass die große Halbachse a der – bezüglich der exzentrischen Anomalie, nicht der Zeit! – mittlere Abstand des Planeten von der Sonne ist. Die Umlaufszeit des Planeten ist ihrerseits gegeben durch die mittlere Bewegung

$$T_{kep} = \frac{n}{2\pi} = \frac{2\pi C}{a^2\sqrt{1-e^2}}\ . \tag{41}$$

Beachtet man die für Ellipsen gültige Beziehung $p = a\,(1-e^2) \sim C^2$, folgt

$$T_{kep}^2 \sim a^3 \Rightarrow \frac{T_{kep}^2}{a^3} = \text{const} \tag{42}$$

und daraus das dritte Keplergesetz

$$\frac{T_{kep}^2}{\left(\overline{r\,(E)}\right)^3} = \text{const}\ . \tag{43}$$

Das ist die von Kepler (Kepler 1978) gegebene Formulierung, dass sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier um die Sonne auf elliptischen Bahnen umlaufender Planeten wie die Kuben ihrer mittleren Abstände von der Sonne verhalten. Wieder musste bei der obigen Herleitung $\mu(t)$ = const angenommen werden. Wenn das nicht zuträfe, dann wäre n wie auch a zeitveränderlich.

Als Ergebnis kann man festhalten: Während die Orientierung der Bahnebene auch bei $\mu(t) \neq \text{const}$ fest bleibt, ist die Lagerung der Bahnkurve in der Bahnebene veränderlich und auch die phoronomischen Bahnelemente a und e sind nicht fest. Bestand hat demnach nur das erste Keplergesetz. Anders gesagt: wenn im Newtonschen Gravitationsgesetz $\mu(t) \neq \text{const}$ gesetzt wird, dann folgt aus den Bewegungsgesetzen nur das erste der Keplergesetze.

Anm.: Vereinfachend wurde angenommen, dass jeweils nur ein als Massenpunkt stilisierter Planet um die punktartig gedachte Sonne umläuft und die Gravitationswechselwirkung der Planeten untereinander außer Betracht bleibt. Dass in hoher Näherung je Planet ein Zweikörperproblem vorliegt, war sicherlich ein glücklicher Umstand für Kepler.

Welche Folgen hätte nun $\mu(t) \neq \text{const}$, also die Annahme

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial t} \neq 0 \quad \text{und/oder} \quad \frac{\partial M_\otimes}{\partial t} \neq 0\ ? \tag{44}$$

Aus der Sonnenphysik ist ein isotroper Massenverlust $\partial M_\otimes / \partial t \neq 0$ bekannt. Hadjidemetriou (Schneider III, 1996) hat für diesen Fall mithilfe einer Störungsrechnung beispielsweise für die Änderung der großen Halbachse und der Bahnexzentrizität je vollen Umlauf eines Planeten gefunden

$$\Delta a = -\frac{2\pi C^3}{G^2}\frac{a_0}{\sqrt{1-e_0^2}}\frac{\dot M_\otimes}{M_\otimes^3} \quad \text{und} \quad \Delta e = 0\ . \tag{45}$$

Da bei Massenverlust gilt

$$\frac{\dot M_\otimes}{M_\otimes^3} < 0\ , \tag{46}$$

woraus folgt

$$\Delta a > 0\ , \tag{47}$$

wächst ihm zufolge die große Halbachse der Planetenbahn. Der Planet rückt langfristig von der Sonne weg. Ob damit beispielsweise die Erdbahn außerhalb der sich zu einem Roten Riesen entwickelnden Sonne bleiben wird, kann auf diesem Wege nicht entschieden werden. Eine diesbezügliche Extrapolation dürfte nicht zulässig sein.

Eine säkulare Änderung der großen Halbachse resultiert aber auch aus einer Änderung $\dot G$ der Gravitationskonstanten, die durch die Analyse der Lasermessungen von der Erde zum Mond untersucht werden kann. Müller und Biskupek (2007) haben Genauigkeitsschranken sowohl für die erste als auch für die zweite Zeitableitung ermittelt:

$$\begin{aligned}
G\,(t) &= G_0\left(1 + \frac{\dot G}{G_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\frac{\ddot G}{G_0}(t-t_0)^2\right)\\
&=: G_0\left(1 + \frac{\Delta G\,(t)}{G_0}\right)\\
\Rightarrow \mu\,(t) &:= G\,(t)\,M_\otimes =: G_0\left(1 + \frac{\Delta G\,(t)}{G_0}\right)M_\otimes =: \mu_0 + \Delta\,\mu(t)\\
\Rightarrow \mu_0 &= G_0 M_\otimes \qquad \Delta\,\mu(t) := \Delta G\,(t)\,M_\otimes
\end{aligned} \tag{48}$$

mit

$$\frac{\dot{G}}{G_0} = (2 \pm 7) \times 10^{-13}\, yr^{-1} \tag{49}$$

und

$$\frac{\ddot{G}}{G_0} = (4 \pm 5) \times 10^{-15}\, yr^{-2} \ . \tag{50}$$

Geht man mit dem Ansatz (48) in die Bewegungsgleichung des Kepler-Problems ein, dann erhält man

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{mG(t)\,M_\otimes}{r^3}\mathbf{r} = -\frac{m\left(G_0 + \Delta G(t)\right)M_\otimes}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{51}$$

oder

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{mG_0 M_\otimes}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{S} \ . \tag{52}$$

Zur Keplerkraft

$$\mathbf{K}_{kep}(\mathbf{r}) := -\frac{mG_0 M_\otimes}{r^3}\mathbf{r} \tag{53}$$

tritt eine durch die Zeitveränderlichkeit der Gravitationskonstanten bedingte Störkraft

$$\frac{\mathbf{S}}{m} = -\frac{\left(\Delta G(t)\right)M_\otimes}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = R\mathbf{U} \tag{54a}$$

hinzu. Aus (54a) entnimmt man für die radiale Komponente R der auf die Masseneinheit bezogenen Störkraft $\mathbf{S}$

$$\frac{\mathbf{S}\cdot\mathbf{U}}{m} =: R = -\frac{\left(\Delta G(t)\right)M_\otimes}{r^2} \ . \tag{54b}$$

Die Störkraft ist wie die Keplerkraft eine Zentralkraft. Sie führt zu keiner Änderung der Lagerung der Bahnebene, beschrieben durch Bahnneigung und Lage des aufsteigenden Bahnknotens. So hat Iorio (2008) für die Änderungen der Keplerschen Bahnelemente zufolge einer Änderung $\dot{G}$ der Gravitationskonstanten während eines Umlaufs gefunden:

$$<\dot{i}>= 0, \qquad <\dot{\Omega}>= 0, \qquad <\dot{\omega}>= 0, \tag{55a}$$

$$\begin{aligned} &<\dot{a}>=\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)\frac{2ae}{(1-e)}, \\ &<\dot{e}>=\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)(1+e), \\ &<\dot{M}>= n\left[1+\left(\frac{\dot{G}}{G}\right)\frac{2}{n}\right]. \end{aligned} \tag{55b}$$

Die Säkularstörung der großen Halbachse wird im Anhang hergeleitet; dort finden sich auch Anmerkungen zu den anderen Störungen.

3 Zusammenfassung und Ausblick

Die Keplerschen Gesetze folgen aus dem Gravitationsgesetz und den Bewegungsgesetzen Newtons. Im Newtonschen Gravitationsgesetz ist G eine universelle Konstante. Die Massen der wechselwirkenden Körper werden als unveränderlich angenommen, also auch das Produkt $GM_\otimes m = \mu_0 m$.

Umgekehrt kann man schließen, dass aus dem Bestehen der Keplergesetze das Gravitationsgesetz in der Newtonschen Form nur mit einem konstanten μ_0 verträglich ist. Die genannten empirischen Befunde zu G und $M_\otimes$ haben Änderungen sowohl an den Keplerschen Gesetzen und/oder dem Gravitationsgesetz als auch an den Bewegungsgesetzen zur Folge. Auch die weitergehende Einsteinsche Gravitationstheorie geht von einer Konstanz der Gravitationskonstanten (Schneider III, 1996) aus. Die Einsteinsche Bewegungsgleichung liefert andererseits Änderungen der Keplerschen Gesetze, beispielsweise die Perihelanomalie der Planeten. Beispiel: Lösung des dem Kepler-Problem korrespondierenden Schwarzschild-Problems (Schneider 1996).

Während der Massenverlust der Sonne empirisch gut belegt ist, lassen die bisherigen Bestimmungen der Zeitveränderlichkeit der Gravitationskonstanten durchaus noch zu, dass diese in den erreichbaren Genauigkeitsgrenzen doch konstant sein könnte. Die Fehler der Bestimmungen sowohl der ersten wie auch der zweiten Zeitableitung von G sind noch vergleichbar den Werten selbst. Zukünftige Abstandsmessungen zum Mond, eine verbesserte Modellierung, genauere numerische Lösung der Bewegungs- und Variationsgleichungen sowie ein längerer Verarbeitungszeitraum sollten diese Frage klären.

Als offene Frage bleibt, ob man in den Bestimmungsgleichungen die Gravitationskonstante durch ein Polynom für deren Zeitabhängigkeit setzen darf.

Stellt sich heraus, dass die Gravitationskonstante zeitveränderlich ist, so ist das weder mit der Newtonschen noch mit der Einsteinschen Gravitationstheorie einschließlich ihrer postnewtonschen Näherungen vereinbar. Das würde bedeuten, dass eine umfangreichere Gravitationstheorie erforderlich ist, die eine Zeitveränderlichkeit der Gravitationskonstanten vorhersagt. Ein Beispiel einer solchen Theorie ist die von Schmutzer (Schmutzer 2004) entwickelte fünfdimensionale projektive Feldtheorie. Sie vereinigt die Einsteinsche Gravitationstheorie mit der Maxwellschen Elektrodynamik und sagt über die Einstein-Effekte hinausgehende Änderungen der Bewegung beispielsweise des Planeten Merkur voraus (Schneider III, 1996), die im Bereich der absehbaren Beobachtungsmöglichkeiten liegen.

Anhang

Die im Hauptteil genannte Säkularstörung (55b) der großen Halbachse zufolge einer Veränderlichkeit der Gravitationskonstanten kann ausgehend von der Gaußschen Form der Planetengleichungen (Schneider II, 1993)

$$\frac{da}{dt} \quad \frac{2e\sin f}{n\sqrt{1-e^2}}R \quad \frac{2a\sqrt{1-e^2}}{nr}S_{\mathrm{T}} \tag{A.1}$$

berechnet werden. R, S_{T} bedeuten die radiale bzw. transversale Komponente der auf die Masseneinheit bezogenen Störkraft. Im Fall der rein radial gerichteten Störkraft zufolge $\dot{G}$

$$\frac{\mathbf{S}}{m} = -\frac{\mu_0}{r^2}\frac{\dot{G}}{G_0}(t-t_0)\frac{\mathbf{r}}{r} =: R\mathbf{U} \tag{A.2}$$

lautet die Störungsgleichung (A.1)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2e\sin f}{n\sqrt{1-e^2}}R = -\frac{2e\sin f}{n\sqrt{1-e^2}}\frac{\mu_0}{r^2}\frac{\dot{G}}{G_0}(t-t_0)\;. \tag{A.3}$$

Zu deren Lösung geht man zweckmäßig auf die exzentrische Anomalie E als unabhängige Variable über. Das gelingt mit den Beziehungen (29) und (37)

$$r = a(1-e\cos E) \quad \text{und} \quad \sin f = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E} \tag{A.4}$$

sowie der Kepler-Gleichung (38)

$$E - e\sin E = n(t-t_0)\;. \tag{A.5}$$

Man erhält, beachtet man das dritte Keplergesetz und den Zusammenhang der Ableitungen nach t bzw. E (Schneider II, 1993),

$$\frac{d}{dE} = \frac{r}{an}\frac{d}{dt}\;, \tag{A.6}$$

für die Planetengleichung (A.3)

$$\begin{aligned}\frac{da}{dE} &= -\frac{r}{an}\frac{2e\sin f}{n\sqrt{1-e^2}}\frac{\mu_0}{r^2}\frac{\dot{G}}{G_0}(t-t_0)\\ &= -\frac{a(1-e\cos E)}{an}\frac{2e}{n\sqrt{1-e^2}}\frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}\frac{GM_{\otimes}}{a^2(1-e\cos E)^2}\frac{\dot{G}}{G_0}\frac{(E-e\sin E)}{n}\\ &= -\frac{2ea}{n}\frac{\dot{G}}{G_0}\frac{(E-e\sin E)\sin E}{(1-e\cos E)^2}\end{aligned} \tag{A.7}$$

Die säkulare, d.h. zeitmonotone Änderung der großen Halbachse während eines Umlaufs ergibt sich wegen $\left[t_0, t_0+T_{kep}\right] \triangleq 0 \le E \le 2\pi$ aus

$$\frac{\Delta a}{T_{kep}} = \frac{1}{T_{kep}}\int_{t_0}^{t_0+T_{kep}}\frac{da}{dt}dt \Leftrightarrow \frac{\Delta a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{E=0}^{E=2\pi}\frac{da}{dE}dE\;. \tag{A.8}$$

Nach der Kepler-Gleichung (38) erhält man für den Zusammenhang der Differentiale dt und dE

$$dt = (1-e\cos E)\,dE \tag{A.9}$$

und daraus wegen $T_{kep} \triangleq 2\pi$

$$\frac{dt}{T_{kep}} = (1-e\cos E)\frac{dE}{2\pi}\;. \tag{A.10}$$

Zu berechnen ist somit

$$\begin{aligned}\frac{\Delta a}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi}\int_{E=0}^{E=2\pi}\frac{da}{dE}dE\\ &= -\frac{ea}{\pi n}\frac{\dot{G}}{G_0}\int_{E=0}^{E=2\pi}\frac{(E-e\sin E)\sin E}{(1-e\cos E)^2}dE\;.\end{aligned} \tag{A.11}$$

Das Integral lässt sich geschlossen auswerten

$$\int_{E=0}^{E=2\pi}\frac{(E-e\sin E)\sin E}{(1-e\cos E)^2}dE = \left.\frac{E\cos E-\sin E}{e\cos E-1}\right|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{e-1}\;, \tag{A.12}$$

sodass sich als Änderung der großen Halbachse je Planetenumlauf ergibt

$$\frac{\Delta a}{2\pi} = -\frac{ea}{\pi n}\frac{\dot{G}}{G_0}\frac{2\pi}{(e-1)} = \frac{2ea}{n(1-e)}\frac{\dot{G}}{G_0}\;. \tag{A.13}$$

Dieses Ergebnis zeigt eine säkulare Änderung zufolge einer Zeitabhängigkeit der Gravitationskonstanten. Es fällt auf, dass für kreisnahe Bahnen $(e \to 0)$ keine Säkularstörung auftreten würde. Das kann man bereits aus der Störungsgleichung ablesen

$$\frac{da}{dt} = \frac{2e\sin f}{n\sqrt{1-e^2}}R \xrightarrow{e\to 0} \frac{da}{dt} \to 0\;. \tag{A.14}$$

Die Abhängigkeit der Bahnstörung von der Bahnexzentrizität ist einleuchtend, ist doch die Verweildauer des umlaufenden Körpers in Aphelnähe (sonnenfernster Bahnpunkt) länger als in Perihelnähe (sonnennächster Bahnpunkt) und damit die Einwirkung der Störkraft bei einer elliptischen Umlaufbahn nicht ausgeglichen. Im Fall einer Kreisbahn ist die Einwirkung der Störkraft hingegen in allen Bahnabschnitten ausgeglichen.

Dass keine Störung der Bahnneigung und der Knotenlage auftreten, lässt sich unmittelbar aus den Störungsgleichungen (Schneider II, 1993)

$$\frac{di}{dt} = \frac{r\cos(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}}W \tag{A.15}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r\sin(f+\omega)}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i}W \tag{A.16}$$

ablesen, worin W die Komponente der Störkraft S entlang der Normalen C_0 der Bahnebene bedeutet. Die Störkraft aufgrund einer zeitlichen Änderung der Gravitationskonstanten aber hat keine Komponente in dieser Richtung (s. Gleichung (54a)).

Für die Apsidenlage ω besteht die Störungsgleichung (Schneider II, 1993)

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\cos f\ R \tag{A.17}$$

für die numerische Exzentrizität e

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\sin f\ R \tag{A.18}$$

und für die mittlere Anomalie M

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{1}{na^2}\left(2r - \frac{p}{e}\cos f\right)R\ . \tag{A.19}$$

Für $(e \to 0)$ werden die Gleichungen (A.17) und (A.19) singulär. Dann muss man nichtsinguläre Bahnelemente einführen (Schneider II, 1993), um die Störungen zufolge $\dot{G}$ berechnen zu können.

Die Störungsrechnung ergibt also folgendes Bild:

1. Die Bewegung verläuft wie im ungestörten Keplerproblem in einer festen Bahnebene. Die Apsidenlage bleibt in der Bahnebene unverändert (s. Gleichung (55a)).
2. Die Bahnkurve ist eine Ellipse mit zunehmender Halbachse und Exzentrizität, wenn die Gravitationskonstante zunimmt. Die mittlere Bewegung ist größer als im ungestörten Fall (s. (55b)).
3. Eine Kreisbahn erfährt keine Säkularstörung der Halbachse. Das bleibt zu untersuchen, weil aus dem dritten Kepler-Gesetz (42) das Gegenteil folgt. Bildet man nämlich das Differential von

$$GM_\otimes = n^2a^3\ , \tag{A.20}$$

also $$d(GM_\otimes) = dn^2a^3 + n^2da^3\ , \tag{A.21}$$

dividiert durch $GM_\otimes$ und beachtet (A.20)

$$\frac{d(GM_\otimes)}{GM_\otimes} = \frac{dn^2a^3 + n^2da^3}{n^2a^3} = \frac{2}{n}dn + \frac{3}{a}da\ , \tag{A.22a}$$

erhält man aufgelöst nach da

$$da = \frac{a}{3}\frac{d(GM_\otimes)}{GM_\otimes} - \frac{2}{3}\frac{a}{n}dn\ . \tag{A.22b}$$

Wenn nun $$d(GM_\otimes) > 0\ , dn > 0\ , \tag{A.23a}$$

und zusätzlich

$$\frac{a}{3}\frac{d(GM_\otimes)}{GM_\otimes} > \frac{2}{3}\frac{a}{n}dn \Rightarrow \frac{d(GM_\otimes)}{GM_\otimes} > \frac{2}{n}dn\ , \tag{A.23b}$$

dann ist eine Zunahme der Halbachse zu erwarten: $da > 0$, und zwar unabhängig von der Bahnexzentrizität. Diese Diskrepanz zum Ergebnis der Störungsrechnung soll durch eine hochgenaue numerische Lösung geklärt werden.

Literatur

Bialas, V. (2004): Johannes Kepler. Verlag C.H. Beck, München.

Caspar, M. (1958): Johannes Kepler. 3. Auflage, W. Kohlhammer Verlag Stuttgart.

Chandrasekhar, S. (1995): Newton´s Principia for the Common Reader. Clarendon Press Oxford.

Copernicus, N. (1972): De Revolutionibus Orbium Coelestium. Mac Millan and Polish Scientific Publ., London, Warschau, Krakau (Faksimile Nachdruck).

Goldberg, E. (1980): Keplers Lehre von der Gravitation. Olms Verlag, Hildesheim.

Iorio, L. (2008): arXiv: 0806.3017v6 [gr-qc].

Kepler, J. (1929): Weltgeheimnis. (Übersetzung von Max Caspar), Augsburg und München/Berlin, 1939.

Kepler, J. (1929): Neue Astronomie. Übersetzt und eingeleitet von Max Caspar, Verlag R. Oldenbourg, München-Berlin.

Kepler, J. (1978): Weltharmonik. Übersetzt und eingeleitet von Max Caspar, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Kepler, J. (1937ff, KGW I–XXII): Gesammelte Werke. Im Auftrag der Deutschen Forschungsgemeinschaft und der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, hrsg. von der Kepler-Kommission, München.

Müller, J. und Biskupek, L. (2007): Variations of the gravitational constant from Lunar Laser Ranging data. Classical and Quantum Gravity, 24, P. 4533–4538.

Newton, I. (1963): Mathematische Prinzipien der Naturlehre. Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt, Übers. von »Philosophiae Naturalis Principia Mathematica«.

Schmutzer, E. (2004): Projektive Einheitliche Feldtheorie mit Anwendungen in Kosmologie und Astrophysik – Neues Weltbild ohne Urknall? Harri Deutsch, Frankfurt a.M.

Schneider, M. (1992–1999): Himmelsmechanik. In vier Bänden, I (1992), II (1993), III (1996), IV (1999), BI-Wissenschaftsverlag Mannheim und Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg.

Szabo, I. (1979): Geschichte der mechanischen Prinzipien. Birkhäuser Verlag Basel, 2. Auflage.

Anschrift der Autoren

Prof. i.R. Dr. rer. nat. Manfred Schneider
Hoppestraße 18, 93049 Regensburg

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Müller
Leibniz Universität Hannover, Institut für Erdmessung
Schneiderberg 50, 30167 Hannover
mueller@ife.uni-hannover.de