

Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler polarer Messsysteme aus Minimalkonfigurationen und überbestimmten Konfigurationen

Frank Neitzel

Zusammenfassung

Um mit einem polaren Messsystem Messungen in einer Fernrohranlage durchzuführen, müssen zuvor der Ziel- und der Kippachsenfehler bestimmt werden. Für die Bestimmung dieser Achsenfehler werden exakte Formeln angegeben. Es wird gezeigt, wie sich die Achsenfehler aus einer Minimalkonfiguration mit zwei Zielpunkten und aus einer überbestimmten Konfiguration mit mehr als zwei Zielpunkten bestimmen lassen. Für beide Fälle werden Hinweise für einen möglichst günstigen Messaufbau gegeben. Die Anwendung der neuen Formeln wird anhand der Bestimmung der Achsenfehler eines terrestrischen Laserscanners demonstriert.

Summary

In order to perform measurements with a polar measuring system in one face position of the telescope, the collimation error and the tilting axis error must be determined in advance. For the determination of these axes errors exact formulas are presented. It is shown, how the axes errors can be derived from a minimal configuration with two target points and an over-determined configuration with more than two target points. For both cases hints to judge the measurement set-up are given. The application of the new formulas is demonstrated on the determination of the axes errors of a terrestrial laser scanner.

1 Einführung

Sollen Winkelmessungen mit einem polaren Messsystem (z.B. Theodolit, Tachymeter, Laserscanner mit tachymetrischem Messprinzip) in einer Fernrohranlage ausgeführt werden, müssen zunächst der Ziel- und der Kippachsenfehler des Instrumentes bestimmt werden, um die Messwerte entsprechend zu korrigieren. Die Definition dieser Achsenfehler ist z.B. in DIN 18709-1, Nr. 9.4.2.27 und Nr. 9.4.2.31 zu finden. In diesem Beitrag werden nun exakte Formeln vorgestellt, mit denen sich die Achsenfehler polarer Messsysteme, mit denen eine Messung in zwei Fernrohranlagen möglich ist, aus Minimalkonfigurationen und überbestimmten Konfigurationen bestimmen lassen.

Als Ausgangspunkt für die Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler dienen die Formeln zur Beschreibung des Einflusses dieser Fehler auf die Richtungsmessung aus Stahlberg (1997). Die grundlegenden Bezeichnungen und Formeln werden in Abschnitt 2 und 3 dargestellt.

Darauf aufbauend wird gezeigt, wie sich die Achsenfehler aus einer Minimalkonfiguration (Messung zu zwei

Zielpunkten) unter Anwendung exakter Formeln bestimmen lassen. Ausgehend von diesen Formeln wird dargestellt, unter welchen Vernachlässigungen sich die bisher in der Literatur (z.B. Kahmen 2006, S. 107 ff.) aufgeführten Näherungsformeln zur Bestimmung der Achsenfehler ergeben. Diese Formelherleitungen basieren auf Petrovic (1997).

Das Ziel einer jeden Instrumentenuntersuchung besteht darin, möglichst zuverlässige Werte für die Instrumentenfehler zu bestimmen. Aus diesem Grund sollten überbestimmte Konfigurationen verwendet werden, um eine Genauigkeitssteigerung der gesuchten Größen zu erzielen und eine Kontrolle auf grobe Fehler in den Beobachtungen zu ermöglichen. Daher wird z.B. für die Bestimmung der Nullpunktkorrektur eines Messsystems, bestehend aus elektrooptischem Distanzmesser und Reflektor, die Streckenmessung in allen Kombinationen empfohlen (Deumlich und Staiger 2002, S. 167).

Da es ratsam ist, auch den Zielachsenfehler und den Kippachsenfehler eines polaren Messsystems aus einer überbestimmten Konfiguration zu bestimmen, wird in diesem Beitrag gezeigt, wie sich diese Größen aus einer Messanordnung mit mehr als zwei Zielpunkten mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten bestimmen lassen.

Die Anwendung der neuen Formeln wird anhand eines numerischen Beispiels zur Bestimmung der Achsenfehler eines terrestrischen Laserscanners veranschaulicht, zudem werden Hinweise zur Auswahl eines möglichst günstigen Messaufbaus gegeben.

2 Das Messsystem als Realisierung eines lokalen Koordinatensystems

Für die Bestimmung der Achsenfehler werden Richtungen und Winkel benötigt, die sich nur auf das Instrument selbst beziehen; eine lotrechte Ausrichtung der Drehachse ist für diese Aufgabenstellung irrelevant. Ist das Instrument mit Neigungskompensatoren ausgestattet, sind diese vor der Bestimmung der Achsenfehler auszuschalten.

In der weiteren Darstellung wird ein polares Messsystem als Realisierung eines lokalen Koordinatensystems angesehen, das beliebig im Raum orientiert sein kann, siehe hierzu Stahlberg (1997). Dieses Koordinatensystem, siehe Abb. 1, wird als Instrumentensystem bezeichnet.

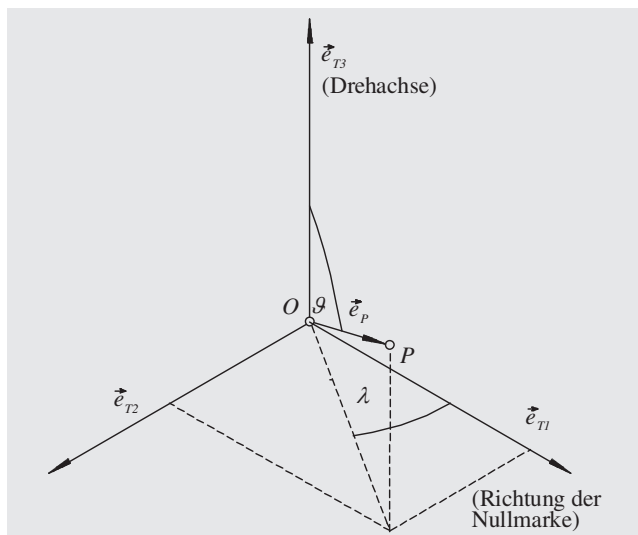


Abb. 1: Das Instrumentensystem (Stahlberg 1997)

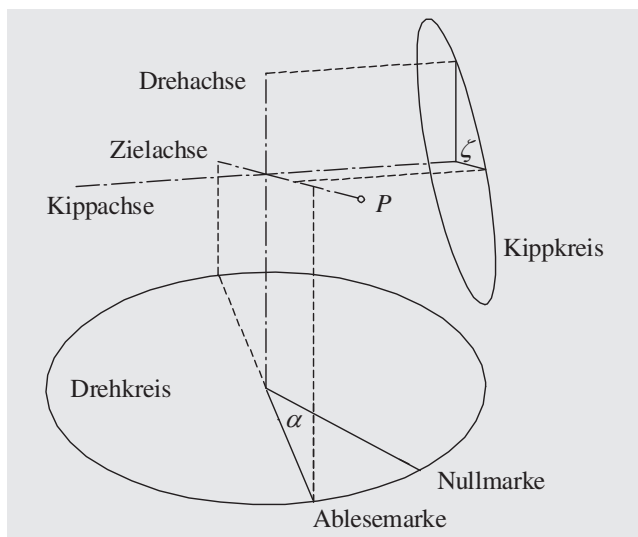


Abb. 2: Achsen und Teilkreise eines polaren Messsystems (Stahlberg 1997)

Um die Beschreibung von Messungen mit einem polaren Messsystem zu ermöglichen, dessen Drehachse nicht lotrecht ausgerichtet ist, werden für die Achsen und Teilkreise die in Stahlberg (1997) eingeführten Bezeichnungen verwendet, siehe Abb. 2.

Das Ziel der Richtungs- und Winkelmessung mit einem polaren Messsystem besteht darin, die durch den Einheitsvektor \vec{e}_p beschriebene Richtung zu einem Zielpunkt P durch die Kugelkoordinaten λ und ϑ bezüglich des Instrumentensystems zu beschreiben, siehe Abb. 1.

Da die Realisierung des abstrakten Instrumentensystems in einem polaren Messsystem aufgrund mechanischer Unzulänglichkeiten nie perfekt gelingen kann, erhält man aus der Messung zu einem Punkt P anstelle der gesuchten Kugelkoordinaten λ und ϑ die Drehkreisrichtung α und den Kippwinkel ζ , siehe Abb. 2.

Eine Vielzahl von mechanischen Unzulänglichkeiten bei der Realisierung des Instrumentensystems, die alleamt die Richtungs- und Winkelmessung beeinflussen, ist in Deumlich und Staiger (2002, S. 205 ff.) aufgeführt. In

diesem Beitrag wird angenommen, dass das polare Messsystem lediglich mit einem Zielachsenfehler c und einem Kippachsenfehler i behaftet ist.

3 Einfluss von Ziel- und Kippachsenfehler

Der Einfluss f , den Zielachsenfehler c und Kippachsenfehler i in Abhängigkeit vom Kippwinkel ζ auf eine Drehkreisrichtung ausüben, lässt sich durch den funktionalen Zusammenhang

$$\tan f = \frac{\cos i \tan c}{\sin \zeta} + \frac{\sin i}{\tan \zeta} \quad (1)$$

beschreiben (Stahlberg 1997). Von den Parametern dieser Gleichung können aus einer Messung in beiden Fernrohr-lagen der Fehlereinfluss f mit

$$f = \frac{\alpha_{II} - 200 \text{ gon} - \alpha_I}{2} \quad (2)$$

und der Kippwinkel ζ mit

$$\zeta = \frac{\zeta_I + 400 \text{ gon} - \zeta_{II}}{2} \quad (3)$$

berechnet werden, wobei mit α_I , α_{II} die Drehkreis- und mit ζ_I , ζ_{II} die Kippkreisablesungen in Lage I und II bezeichnet sind. Es ist anzumerken, dass die Mittelbildung in (3) lediglich dazu dient, den Einfluss eines eventuell vorhandenen Indexfehlers zu eliminieren, damit sich der Kippwinkel auf die Drehachse des Instrumentes bezieht.

Da f und ζ aus Messungen in beiden Fernrohr-lagen aus (2) und (3) bestimmt werden können, enthält Gleichung (1) die beiden Unbekannten c und i . Zur Bestimmung dieser Unbekannten sind also mindestens zwei solcher Gleichungen, also Messungen zu zwei Punkten in beiden Fernrohr-lagen erforderlich. Werden mehr als zwei Punkte verwendet, liegt eine überbestimmte Konfiguration vor und die Achsenfehler können mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten bestimmt werden.

Nach der Bestimmung des Zielachsenfehlers c und des Kippachsenfehlers i erhält man die gesuchten Kugelkoordinaten, z.B. unter Verwendung von Ablesungen α_I und ζ_I in Fernrohr-lage I, aus

$$\tan f = \frac{\cos i \tan c}{\sin \zeta_I} + \frac{\sin i}{\tan \zeta_I}, \quad (4)$$

$$\lambda = \alpha_I + f \quad (5)$$

und

$$\cos \vartheta = \cos i \cos c \cos \zeta_1 - \sin i \sin c, \quad (6)$$

vergleiche Stahlberg (1997), wobei davon ausgegangen wird, dass ζ_1 um einen eventuell vorhandenen Indexfehler korrigiert wurde.

4 Bestimmung der Achsenfehler aus einer Minimalkonfiguration

4.1 Exakte Bestimmung

Aus der Messung zu $n = 2$ Zielpunkten in beiden Fernrohrlagen liegen die Werte $\alpha_{1_1}, \alpha_{1_n}, \zeta_{1_1}, \zeta_{1_n}$ und $\alpha_{2_1}, \alpha_{2_n}, \zeta_{2_1}, \zeta_{2_n}$ vor. Berechnet man die Werte f_i mit (2) und die Kippwinkel ζ_i mit (3), lässt sich das Gleichungssystem

$$\tan f_1 = \frac{\cos i \tan c}{\sin \zeta_1} + \frac{\sin i}{\tan \zeta_1} \quad (7)$$

$$\tan f_2 = \frac{\cos i \tan c}{\sin \zeta_2} + \frac{\sin i}{\tan \zeta_2}$$

aufstellen. Die Auflösung dieses Gleichungssystems ergibt

$$\sin i = \frac{\tan f_1 \sin \zeta_1 - \tan f_2 \sin \zeta_2}{\cos \zeta_1 - \cos \zeta_2} \quad (8)$$

und

$$\tan c = \frac{\sin \zeta_j}{\cos i} \left(\tan f_j - \frac{\sin i}{\tan \zeta_j} \right) \quad (9)$$

mit $j = 1, 2$. Mit den Formeln (8) und (9) erfolgt eine exakte Bestimmung von i und c , da berücksichtigt wird, dass die Einflüsse beider Achsenfehler nicht unabhängig voneinander sind, siehe hierzu Stahlberg (1997).

Unter Verwendung der berechneten Achsenfehler i und c können die gesuchten Kugelkoordinaten λ und ϑ aus den Formeln (4) bis (6) berechnet werden.

4.2 Die Näherungsformeln in der Literatur

Im Folgenden wird gezeigt, unter welchen Vernachlässigungen man aus den exakten Formeln (8) und (9) die bekannten Näherungsformeln in der Literatur erhält. Setzt man in (1)

$$\cos i = 1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \quad (10)$$

ein, erhält man

$$\tan f = \frac{\tan c}{\sin \zeta} + \frac{-2 \tan c \sin^2 \frac{i}{2}}{\sin \zeta} + \frac{\sin i}{\tan \zeta}. \quad (11)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Achsenfehler kleine Winkel sind und $\zeta \gg 0$ ist, wird der zweite Summand, der den gemeinsamen Anteil der Achsenfehler beschreibt, sehr klein und es ergibt sich die Näherungsformel

$$\tan f \approx \frac{\tan c}{\sin \zeta} + \frac{\sin i}{\tan \zeta}. \quad (12)$$

Sorgt man durch Auswahl eines geeigneten Zielpunktes dafür, dass $\zeta = 100 \text{ gon}$ ist, ergibt sich die Näherungsformel (12) zu

$$\tan c \approx \tan f \quad (13)$$

beziehungsweise

$$c \approx f. \quad (14)$$

Wieder unter der Annahme kleiner Winkel lässt sich für (12) mit

$$f \approx \frac{c}{\sin \zeta} + \frac{i}{\tan \zeta} \quad (15)$$

eine weitere Näherung angeben. Stellt man diesen Ausdruck um, erhält man für die Berechnung des Kippachsenfehlers

$$i \approx \left(f - \frac{c}{\sin \zeta} \right) \tan \zeta, \quad (16)$$

wobei für f und ζ die Werte aus der Messung zum Hochpunkt einzusetzen sind. Die Näherungsformeln (14) und (16) entsprechen denen, die z.B. in Kahmen (2006, S. 107 ff.) in anderer Notation für die Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler unter Verwendung von Horizontalrichtungen und Zenitwinkeln angegeben werden.

Obwohl diese Näherungsformeln, wie numerische Untersuchungen gezeigt haben, in nahezu allen praktischen Anwendungen verwendet werden können (erst bei sehr steilen Visuren ab ca. $\zeta < 0.5 \text{ gon}$ zeigen sich signifikante Abweichungen des Kippachsenfehlers zur strengen Lösung), sei an dieser Stelle von deren Verwendung abgeraten. Im Zeitalter von Taschenrechner und PC besteht einfach keine Notwendigkeit mehr, einen Messaufbau mit einem Ziel bei $\zeta = 100 \text{ gon}$ zu fordern, um die Anwendung von Näherungsformeln zu ermöglichen. Verwendet man die einfach zu programmierenden exakten Formeln (8) und (9), ist man in der Lage, mit einem Zielpunkt mit $\zeta > 100 \text{ gon}$ einen fehlertheoretisch günstigeren Messaufbau zu wählen, als bei der Verwendung eines Zielpunktes mit $\zeta = 100 \text{ gon}$.

4.3 Varianzuntersuchungen

Die Frage, die es nun zu beantworten gilt, ist die nach einem günstigen Messaufbau, der zu einer möglichst geringen Standardabweichung für den Ziel- und Kippachsenfehler führt. Grundlage für die folgenden Untersuchungen bilden die Formeln zur exakten Bestimmung der Achsenfehler aus Abschnitt 4.1. Liegen seitens des Geräteherstellers die Angaben über die Standardabweichung einer in zwei Fernrohrlagen beobachteten Richtung σ_α vor, kann dieser Wert aufgrund der Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung in dem funktionalen Zusammenhang (2) mit

$$\sigma_{f_i} = \sigma_\alpha \quad (17)$$

direkt als Standardabweichung für die »Beobachtungen« f_i verwendet werden. Verwendet man zudem die Herstellerangabe σ_ζ für einen in zwei Lagen beobachteten Kippwinkel, können mit Hilfe der Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung in den Gleichungen (8) und (9) die Standardabweichungen σ_i und σ_c berechnet werden. Zu einer übersichtlichen Darstellung der Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung gelangt man, indem der funktionale Zusammenhang in zwei Schritte zerlegt wird.

Die Gleichungen für den ersten Schritt lauten

$$i = \arcsin\left(\frac{\tan f_1 \sin \zeta_1 - \tan f_2 \sin \zeta_2}{\cos \zeta_1 - \cos \zeta_2}\right), \quad (18)$$

$$f_1 = f_i, \quad (19)$$

$$\zeta_1 = \zeta_i, \quad (20)$$

die Funktionalmatrix F_1 mit den partiellen Ableitungen ergibt sich zu

$$F_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial i}{\partial f_1} & \frac{\partial i}{\partial f_2} & \frac{\partial i}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial i}{\partial \zeta_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Aus den Gleichungen für den zweiten Schritt

$$i = i, \quad (22)$$

$$c = \arctan\left(\frac{\sin \zeta_1}{\cos i} \left(\tan f_1 - \frac{\sin i}{\tan \zeta_1}\right)\right) \quad (23)$$

ergibt sich die Funktionalmatrix F_2 zu

$$F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial c}{\partial i} & \frac{\partial c}{\partial f_1} & \frac{\partial c}{\partial \zeta_1} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Mit der Varianzmatrix der Beobachtungen

$$C_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_f^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_f^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\zeta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_\zeta^2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

erhält man aus

$$C_{xx} = F_2 F_1 C_{11} F_1^T F_2^T \quad (26)$$

die Varianz-Kovarianzmatrix der Unbekannten und daraus die Standardabweichungen σ_i und σ_c . Führt man mit gegebenen Werten σ_f und σ_ζ numerische Untersuchungen mit unterschiedlichen Kippwinkeln ζ_1 und ζ_2 durch, lassen sich die Ergebnisse der Varianzuntersuchungen, wie folgt, zusammenfassen:

- Ein günstiger Messaufbau für die Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler liegt vor, wenn der Betrag $|\zeta_1 - \zeta_2|$ möglichst groß ist. Somit sind für die Bestimmung der Achsenfehler ein möglichst »hoch« und ein möglichst »tief« gelegener Zielpunkt auszuwählen.
- Je geringer der Betrag $|\zeta_1 - \zeta_2|$ ist, desto größer wird insbesondere die Standardabweichung des Kippachsenfehlers.

Neben der Standardabweichung der Achsenfehler ist für den Anwender insbesondere die Standardabweichung σ_f interessant. Werden nämlich Richtungsmessungen in einer Fernrohrlage (z.B. Lage I) mit (5) um den Einfluss der Achsenfehler korrigiert, setzt sich die Standardabweichung σ_λ aus den Werten für σ_{α_i} und σ_f zusammen. Die Berechnung der Standardabweichung σ_f kann mit Hilfe einer Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung unter Verwendung der Formel (1) erfolgen. In Abb. 3 ist die Standardabweichung σ_f für verschiedene Kippwinkel unter Verwendung der Werte $i = 0$ und $c = 5 \text{ mgon}$ mit $\sigma_c = 0.40 \text{ mgon}$ dargestellt.

Abb. 4 zeigt die Standardabweichung σ_f für die Werte $c = 0$ und $i = 5 \text{ mgon}$ mit $\sigma_i = 0.86 \text{ mgon}$.

Es ist zu erkennen, dass der Wert σ_f erst bei Kippwinkeln mit $\zeta < 60 \text{ gon}$ und $\zeta > 140 \text{ gon}$ den größten Wert für σ_f in Abb. 3 übersteigt, obwohl σ_i in diesem Beispiel mehr als doppelt so groß gewählt wurde wie σ_c im vorangegangenen Beispiel. Die Standardabweichung σ_f wird also stärker von σ_c beeinflusst als von σ_i . Diese Schlussfolgerung lässt sich auch anhand der Größe der partiellen Ableitungen bei der Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung zeigen.

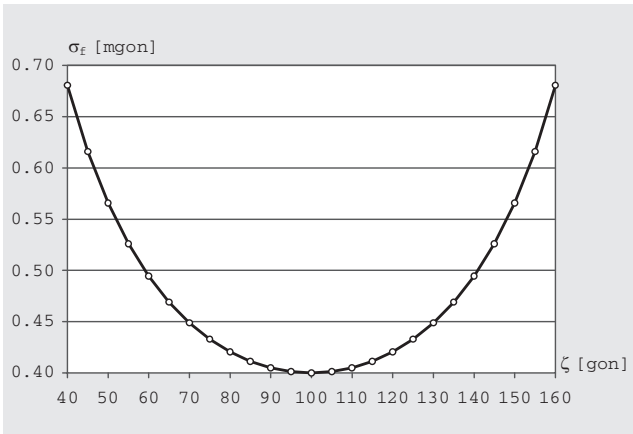


Abb. 3: σ_f für $i = 0$, $c = 5$ mgon, $\sigma_c = 0.40$ mgon

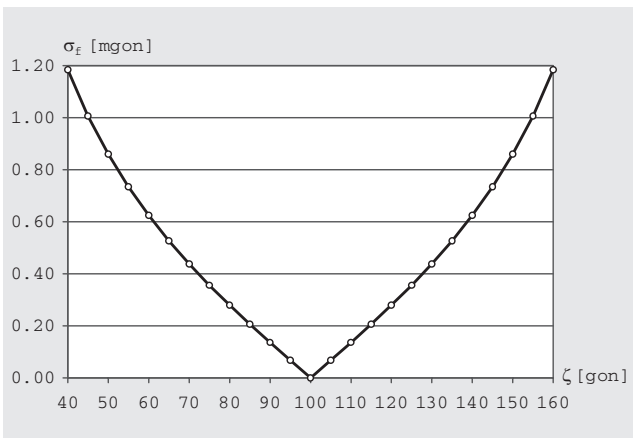


Abb. 4: σ_f für $c = 0$, $i = 5$ mgon, $\sigma_i = 0.86$ mgon

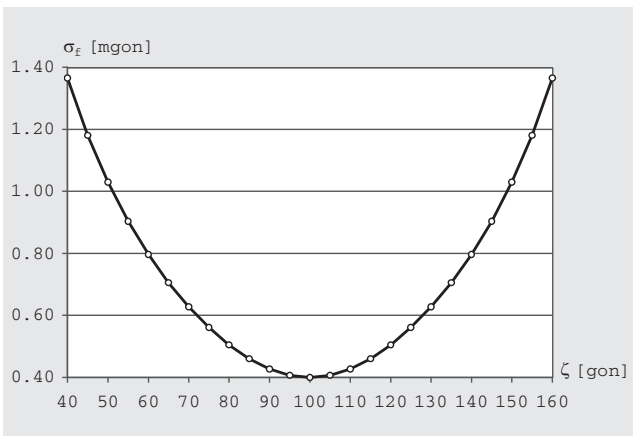


Abb. 5: σ_f für $c = i = 5$ mgon, $\sigma_c = 0.40$ mgon, $\sigma_i = 0.86$ mgon

In Abb. 5 ist die Standardabweichung σ_f ersichtlich für die Werte $c = 5$ mgon mit $\sigma_c = 0.40$ mgon und $i = 5$ mgon mit $\sigma_i = 0.86$ mgon.

Um für die Kugelkoordinate λ eine möglichst geringe Standardabweichung zu erhalten, ist also insbesondere darauf zu achten, dass die Standardabweichung des Zielachsenfehlers σ_c einen möglichst geringen Wert aufweist. Eine Steigerung der Genauigkeit und Zuverlässig-

keit bei der Bestimmung der Achsenfehler kann erreicht werden, wenn diese nicht (wie bisher in der Literatur beschrieben) aus einer Minimalkonfiguration bestimmt werden, sondern aus einer überbestimmten Konfiguration mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten.

5 Überbestimmte Konfiguration

Nach der eingehenden Untersuchung der Bestimmung der Achsenfehler mit Hilfe einer Minimalkonfiguration wird nun gezeigt, wie sich die Achsenfehler unter Verwendung von $n > 2$ Zielpunkten aus einer überbestimmten Konfiguration bestimmen lassen.

5.1 Nichtlineares funktionales Modell

Aus den Ergebnissen der Messungen zu n Zielpunkten in Lage I und II lassen sich ausgehend von (1) die nichtlinearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \tan f_1 &= \frac{\cos i \tan c}{\sin \zeta_1} + \frac{\sin i}{\tan \zeta_1} \\ \tan f_2 &= \frac{\cos i \tan c}{\sin \zeta_2} + \frac{\sin i}{\tan \zeta_2} \\ &\vdots \\ \tan f_n &= \frac{\cos i \tan c}{\sin \zeta_n} + \frac{\sin i}{\tan \zeta_n} \end{aligned} \quad (27)$$

aufstellen. Um die Unbekannten mit Hilfe einer vermittelnden Ausgleichung mit einer Beobachtung pro Beobachtungsgleichung zu lösen, werden die Kippwinkel plus ihre Verbesserungen als zusätzliche unbekannte Parameter angesehen, siehe Koch (2000, S. 88 ff.), also

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_1 &= \zeta_1 + v_{\zeta_1} \\ \hat{\zeta}_2 &= \zeta_2 + v_{\zeta_2} \\ &\vdots \\ \hat{\zeta}_n &= \zeta_n + v_{\zeta_n} \end{aligned} \quad (28)$$

Sieht man die Definition (28) als zusätzliche Beobachtungsgleichungen an, erhält man die insgesamt $2n$ Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 f_1 + v_{f_1} &= \arctan \left(\frac{\cos i \tan c}{\sin \hat{\zeta}_1} + \frac{\sin i}{\tan \hat{\zeta}_1} \right) \\
 f_2 + v_{f_2} &= \arctan \left(\frac{\cos i \tan c}{\sin \hat{\zeta}_2} + \frac{\sin i}{\tan \hat{\zeta}_2} \right) \\
 &\vdots \\
 f_n + v_{f_n} &= \arctan \left(\frac{\cos i \tan c}{\sin \hat{\zeta}_n} + \frac{\sin i}{\tan \hat{\zeta}_n} \right) \quad (29) \\
 \zeta_1 + v_{\zeta_1} &= \hat{\zeta}_1 \\
 \zeta_2 + v_{\zeta_2} &= \hat{\zeta}_2 \\
 &\vdots \\
 \zeta_n + v_{\zeta_n} &= \hat{\zeta}_n
 \end{aligned}$$

zur Bestimmung der Unbekannten i , c und ζ_1, \dots, ζ_n . Dieses nichtlineare Ausgleichsproblem kann durch Linearisierung an der Stelle geeigneter Näherungswerte c^0 , i^0 sowie ζ_i^0 und iterative Berechnung gelöst werden.

Umfangreiche numerische Untersuchungen mit dem vorgestellten Ansatz haben gezeigt, dass die Redundanzanteile der Beobachtungen ζ_1, \dots, ζ_n derartig klein sind im Vergleich zu denen der Beobachtungen f_1, \dots, f_n , dass man die Beobachtungen ζ_i als feste Parameter in die Ausgleichung einführen kann, ohne dass sich die ausgeglichenen Parameter \hat{c} , \hat{i} und deren Standardabweichungen signifikant ändern. Im folgenden Abschnitt wird daher ein Modell vorgestellt, in dem die Werte ζ_i als feste Parameter eingeführt werden.

5.2 Lineares funktionales Modell

Führt man die Kippwinkel ζ_i als feste Parameter ein, erhält man mit den Substitutionen

$$l_i = \tan f_i \quad (30)$$

$$a = \cos i \tan c \quad (31)$$

$$b = \sin i \quad (32)$$

ein *lineares* funktionales Modell

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \frac{1}{\sin \zeta_1} a + \frac{1}{\tan \zeta_1} b \\
 l_2 &= \frac{1}{\sin \zeta_2} a + \frac{1}{\tan \zeta_2} b \\
 &\vdots \\
 l_n &= \frac{1}{\sin \zeta_n} a + \frac{1}{\tan \zeta_n} b
 \end{aligned} \quad (33)$$

und daraus die Beobachtungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 l_1 + v_{l_1} &= \frac{1}{\sin \zeta_1} a + \frac{1}{\tan \zeta_1} b \\
 l_2 + v_{l_2} &= \frac{1}{\sin \zeta_2} a + \frac{1}{\tan \zeta_2} b \\
 &\vdots \\
 l_n + v_{l_n} &= \frac{1}{\sin \zeta_n} a + \frac{1}{\tan \zeta_n} b
 \end{aligned} \quad (34)$$

Fasst man die unbekannt Parameter zum Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (35)$$

zusammen, lautet die Funktionalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sin \zeta_1} & \frac{1}{\tan \zeta_1} \\ \frac{1}{\sin \zeta_2} & \frac{1}{\tan \zeta_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sin \zeta_n} & \frac{1}{\tan \zeta_n} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

der Beobachtungsvektor ergibt sich zu

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \tan f_1 \\ \tan f_2 \\ \vdots \\ \tan f_n \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Mit der Gewichtsmatrix \mathbf{P} der Beobachtungen l_i ergibt sich mit dem Varianzfaktor σ_0^2 das lineare Modell zu

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l} \quad \text{mit} \quad D(\mathbf{l} | \sigma_0^2) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}. \quad (38)$$

Die Schätzwerte für die Unbekannten \hat{a} und \hat{b} erhält man direkt aus den Normalgleichungen

$$\frac{\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}}{N} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (39)$$

die Schätzwerte für den Kippachsenfehler \hat{i} und den Zielachsenfehler \hat{c} ergeben sich aus (31) und (32) zu

$$\hat{i} = \arcsin \hat{b} \quad (40)$$

und

$$\hat{c} = \arctan \left(\frac{\hat{a}}{\cos \hat{i}} \right). \quad (41)$$

Die Standardabweichungen σ_i und σ_c lassen sich mit Hilfe der Varianz-Kovarianz-Fortpflanzung berechnen.

5.3 Auswahl günstiger Konfigurationen

Die Frage nach der Anzahl der Zielpunkte und deren Anordnung zur Bestimmung der Achsenfehler aus einer überbestimmten Konfiguration kann mit Hilfe der Interpretation der Redundanzanteile der Beobachtungen f_i für den Ansatz aus Abschnitt 5.1 oder der Beobachtungen l_i aus Abschnitt 5.2 beantwortet werden.

In numerischen Untersuchungen wurden z. B. mit dem Ansatz aus Abschnitt 5.2 die Redundanzanteile für 11 Beobachtungen l_i berechnet, die bei Kippwinkeln von $\zeta_i = 60, 65, \dots, 110$ gon durchgeführt wurden. Eliminiert man, im Sinne einer Netzoptimierung, sukzessive jeweils die Beobachtung l_i mit dem größten Redundanzanteil, lassen sich nach einigen Iterationen die folgenden Hinweise für einen möglichst günstigen Messaufbau angeben:

- Die Verwendung von (mindestens) sechs Zielpunkten stellt einen guten Kompromiss aus Wirtschaftlichkeit und hoher Kontrolliertheit der Beobachtungen dar.
- Die Zielpunkte sollen möglichst nahe des Hochziels und des Tiefziels ausgewählt werden. Bei der Verwendung von sechs Zielpunkten sind somit drei Punkte mit möglichst steiler Visur nach »oben« und drei Punkte mit möglichst steiler Visur nach »unten« auszuwählen.

6 Anwendungsbeispiel

Die Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler aus einer überbestimmten Konfiguration wird anhand von Messungen mit dem Laserscanner Imager 5003 der Firma Zoller + Fröhlich gezeigt. Da dieser Scanner nach dem tachymetrischen Messprinzip arbeitet, können die Achsenbezeichnungen eines Tachymeters, wie folgt, verwendet werden:

- Kippachse: Achse, um die der Umlenkspiegel während eines Scanvorgangs rotiert.
- Zielachse: Unter Annahme einer kegelförmigen Ausbreitung des Messstrahls ergibt sich die Zielachse als Gerade von dem Punkt, an dem der Messstrahl in Richtung des Objektes ausgestrahlt wird (Punkt Z) zum Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels (Punkt Z'), siehe Abb. 6.

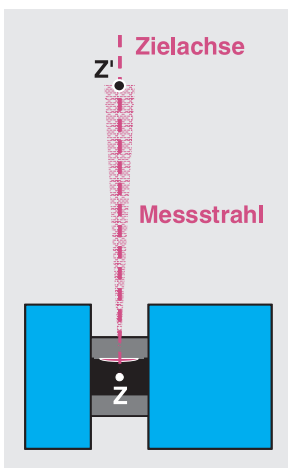
Die Begriffe Ziel- und Kippachsenfehler für die Untersuchung dieses Gerätes können wie folgt definiert werden:

- Kippachsenfehler i : Winkel zwischen der Kippachse des Umlenkspiegels und der Normalen zur Drehachse, gemessen in der Ebene aufgespannt durch Drehachse und Kippachse.
- Zielachsenfehler c : Winkel zwischen der Zielachse und der Normalen zur Kippachse, gemessen in der Ebene aufgespannt durch Kipp- und Zielachse.

Eine Veranschaulichung der Achsenfehler zeigt Abb. 7.

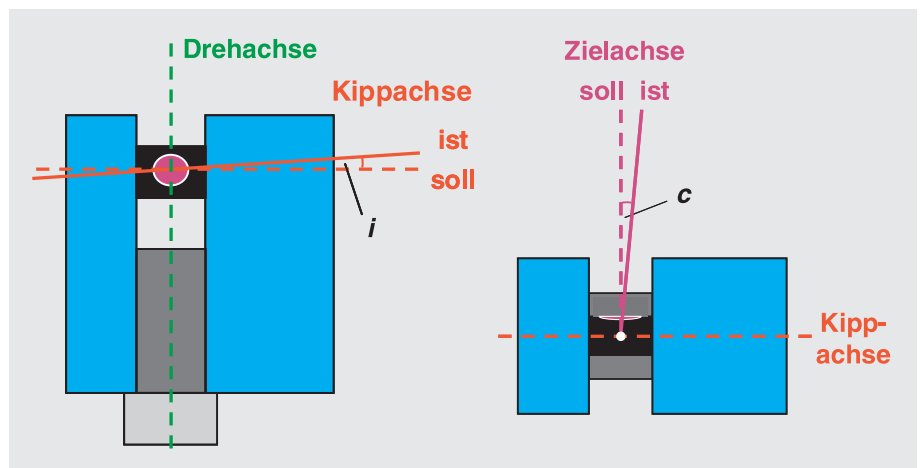
Um mit dem Imager 5003 eine Messung in zwei Lagen durchzuführen, sind die Scanparameter »Start angle« und »Stop angle« in dem Eingabefeld »Azimute (Low speed motor)« auf 0° bzw. 360° zu setzen. Mit dieser Geräteeinstellung werden dann sechs Zielpunkte in zwei Lagen gescannt, die durch weiß lackierte Holzkugeln mit einem Durchmesser von 15 cm signalisiert wurden, siehe Abb. 8.

Als Messwerte liegen die kartesischen Koordinaten im Scannerkoordinatensystem der erfassten Teile der Kugeloberflächen vor, aus denen die Koordinaten der Kugelmittelpunkte mit Hilfe einer Ausgleichung berechnet werden. In dieser Ausgleichung werden die Radien der Kugeln als feste Parameter eingeführt, Einzelpunkte, die einen Abstand von mehr als 1 cm von der ausgeglichenen Kugeloberfläche aufweisen, werden sukzessive als Ausreißer eliminiert, siehe hierzu auch Schulz und Ingen-sand (2004b). Mit dieser Vorgehensweise werden auch die Punkte auf den Kugeloberflächen eliminiert, die aufgrund eines sehr flachen Auftreffwinkels des Messstrahls zu einer fehlerhaften Streckenmessung führen. Untersu-



◀ Abb. 6:
Zielachse des
Imager 5003

▶ Abb. 7:
Kipp- und
Zielachsen-
fehler beim
Imager 5003



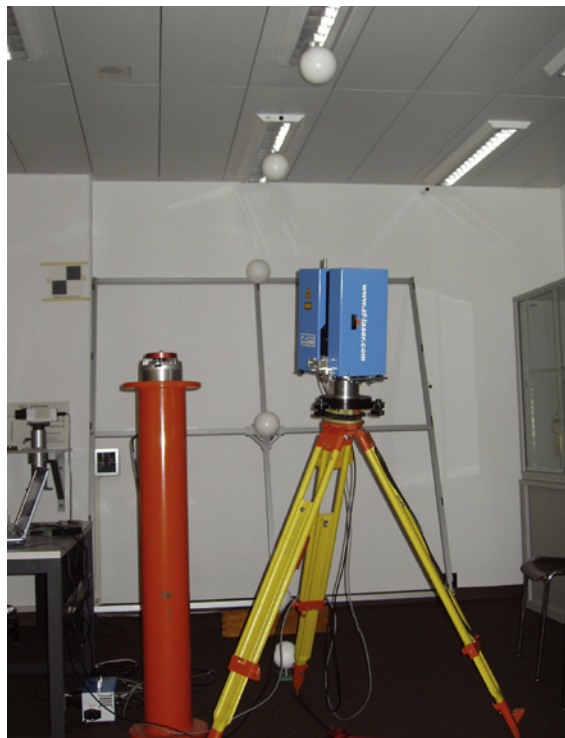


Abb. 8: Messaufbau zur Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler eines Laserscanners

chungen zum Verhalten der Streckengenauigkeit in Abhängigkeit vom Auftreffwinkel des Messstrahls sind in Schulz und Ingensand (2004a) am Beispiel einer weißen Zieltafel aufgeführt.

Aus den Koordinaten der Kugelmittelpunkte können die in Tab. 1 aufgeführten Drehkreisrichtungen und die in Tab. 2 zusammengestellten Kippwinkel im Scannerkoordinatensystem berechnet werden.

Tab. 1: Berechnete Drehkreisrichtungen

Kugel	α_i [gon]	α_{i_0} [gon]	f_i [gon]
1	82.9120	82.4748	-0.2186
2	74.5718	74.5271	-0.0224
3	74.3826	74.3672	-0.0077
4	74.2993	74.2946	-0.0023
5	74.2643	74.2797	0.0077
6	69.2034	69.2449	0.0207

Tab. 2: Berechnete Kippwinkel

Kugel	ζ_i [gon]	ζ_{i_0} [gon]	ζ_i [gon]
1	14.8323	14.8291	14.8307
2	64.4979	64.4822	64.4901
3	86.0191	86.0188	86.0189
4	111.6059	111.6044	111.6051
5	140.4726	140.4868	140.4797
6	164.0902	164.1084	164.0993

Die Werte f_i erhält man aus

$$f_i = \frac{\alpha_{i_0} - \alpha_i}{2}, \tag{42}$$

die Kippwinkel ζ_i ergeben sich als Mittel aus ζ_{i_0} und ζ_i .

Mit f_i und ζ_i stehen nun alle Werte zur Verfügung, um die Berechnung des Ziel- und Kippachsenfehlers mit dem Ansatz aus Abschnitt 5.1 oder 5.2 durchzuführen. In diesem Beispiel erfolgt die Berechnung mit dem Ansatz aus Abschnitt 5.2, als Gewichtsmatrix für die Beobachtungen wird $P = E$ verwendet. Da in diesem Ansatz die Kippwinkel als feste Größen eingeführt werden, bleiben die Korrelationen zwischen den Größen f_i und ζ_i unberücksichtigt. Aus der Ausgleichung ergibt sich der Zielachsenfehler zu $\hat{c} = -14.6$ mgon mit $\sigma_c = 3.2$ mgon, für den Kippachsenfehler erhält man $\hat{i} = -35.4$ mgon mit $\sigma_i = 3.6$ mgon.

Ob sich Ziel- und Kippachsenfehler signifikant vom Wert null unterscheiden, kann mit Hilfe eines t -Tests, siehe z.B. Niemeier (2002, S. 66ff.), überprüft werden. Der Test ergibt in diesem Beispiel, dass sich beide Parameter bei einer zweiseitigen Alternativhypothese und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ signifikant von null unterscheiden.

Die Anbringung des Einflusses der Achsenfehler erfolgt derart, dass die kartesischen Koordinaten der gesamten Punktwolke zunächst in Polarkoordinaten umgerechnet werden. Dann kann der Einfluss der Achsenfehler mit den Formeln (4) bis (6) angebracht werden, danach erfolgt die Umrechnung in kartesische Koordinaten.

Es ist anzumerken, dass obwohl das Ausgleichungsergebnis eine möglichst vollständige Modellbildung vermuten lässt (z.B. anhand der Interpretation der normierten Verbesserungen der Beobachtungen), dies keine Gewähr dafür ist, dass nicht noch weitere Instrumentenfehler (z.B. Exzentrizität der Zielachse bzw. des aus dem Instrument austretenden Laserstrahls) vorhanden sind, die sich bei entsprechender Berücksichtigung im funktionalen Modell als signifikant erweisen würden, siehe hierzu Neitzel (2006).

7 Schlussbetrachtung

Auf Grundlage der exakten Formeln für den Einfluss von Ziel- und Kippachsenfehler auf die Winkelmessung (Stahlberg 1997) wurde gezeigt, wie sich die Achsenfehler aus Dreh- und Kippkreisablesungen bestimmen lassen. Für die Minimalconfiguration unter Verwendung von zwei Zielpunkten wurden exakte Formeln vorgestellt. Im Anschluss daran wurde aufgezeigt, unter welchen Vernachlässigungen sich die aus der Literatur bekannten Näherungsformeln zur Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler ergeben.

Die auf Grundlage der exakten Formeln durchgeführten Varianzuntersuchungen haben ergeben, dass die Zielpunkte für die Bestimmung der Achsenfehler möglichst »hoch« und möglichst »tief« angeordnet sein sollen. Weiterhin wurde gezeigt, dass die Standardabweichung des Einflusses der Achsenfehler insbesondere von der Standardabweichung des Zielachsenfehlers beeinflusst wird. Die Zielsetzung, die Achsenfehler möglichst zuverlässig und mit einer möglichst geringen Standardabweichung zu bestimmen, motivierte die Verwendung einer überbestimmten Konfiguration mit mehr als zwei Zielpunkten.

Werden mehr als zwei Zielpunkte für die Bestimmung der Achsenfehler angemessen, können diese mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten berechnet werden. Nimmt man dabei die Kippwinkel als feste Parameter an, ergibt sich ein einfaches funktionales Modell in linearer Form. Für den Anwender steht somit ein praktikables Mess- und Auswerteverfahren zur Verfügung, mit dem er in der Lage ist, Ziel- und Kippachsenfehler eines polaren Messsystems aus einer überbestimmten Konfiguration zu bestimmen. Untersuchungen zur Auswahl der Zielpunkte mit Hilfe der Redundanzanteile der Beobachtungen haben ergeben, dass die Zielpunkte eine möglichst steile Visur nach »oben« und nach »unten« aufweisen sollen.

Die Berechnung der Achsenfehler aus einer überbestimmten Konfiguration wurde anhand eines praxisrelevanten Beispiels aus dem Bereich des terrestrischen Laserscannings demonstriert. Gegenstand weiterer Untersuchungen sollte die Überprüfung der Zeitabhängigkeit der Achsenfehler aufgrund der Erwärmung elektronischer Bauteile im Gerät und die Überprüfung des Langzeitverhaltens der Achsenfehler über mehrere Wochen und Monate sein.

Soll ein Laserscanner auf das Vorhandensein weiterer Instrumentenfehler untersucht werden, die je nach Bauart unterschiedlich sein können (z. B. Exzentrizitäten, Instabilität der Drehachse), können die vorgestellten Formeln als Baustein für eine weitergehende Untersuchung verwendet werden. Soll ein polares Messsystem z. B. zusätzlich auf das Vorhandensein einer Exzentrizität der Zielachse untersucht werden, ist der Einfluss dieses Fehlers auf die Drehkreisablesung zusätzlich zum Einfluss von Ziel- und Kippachsenfehler (1) zu modellieren. Die gemeinsame Bestimmung von Ziel-, Kippachsenfehler und Exzentrizität der Zielachse aus einer überbestimmten Konfiguration wird in Neitzel (2006) gezeigt.

Es wäre wünschenswert, wenn die Hersteller von Tachymetern und Laserscannern mit tachymetrischem Messprinzip die strenge Bestimmung der Achsenfehler aus einer Minimalkonfiguration und insbesondere die Bestimmung aus einer überbestimmten Konfiguration in die Gerätesoftware übernehmen würden oder zumindest die Eingabe von Achsenfehlern ermöglichen, die nicht mit der Gerätesoftware und dem damit vorgeschriebenen Messaufbau bestimmt wurden. Weiterhin wäre es zu begrüßen, wenn die Bestimmung der Achsenfehler aus ei-

ner Minimalkonfiguration unter Verwendung exakter Formeln und die Bestimmung aus einer überbestimmten Konfiguration Einzug in die Literatur zur Angewandten Geodäsie und zur Instrumentenkunde finden würden.

Danksagung

Die Untersuchung des Laserscanners Imager 5003 wurde an der ETH Zürich durchgeführt. Der Autor möchte sich an dieser Stelle bei Prof. H. Ingensand für die Einladung zum Forschungsaufenthalt an der ETH Zürich bedanken. Ein Dank gebührt auch Dipl.-Ing. T. Schulz, der die Messungen und die Auswertungen der Scannerdaten maßgeblich unterstützt hat. Weiterhin möchte ich mich bei Dr. techn. habil. S. Petrovic und Dipl.-Ing. C. Stahlberg für fruchtbare Diskussionen zum Thema Achsenfehler bedanken.

Literatur

- Deumlich, F. und Staiger, R.: Instrumentenkunde der Vermessungstechnik. 9., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2002.
- DIN 18709-1 (Oktober 1995): Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen, Teil 1: Allgemeines.
- Kahmen, H.: Angewandte Geodäsie – Vermessungskunde. 20., völlig neu bearbeitete Auflage. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2006.
- Koch, K.R.: Einführung in die Bayes-Statistik. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- Neitzel, F.: Gemeinsame Bestimmung von Ziel-, Kippachsenfehler und Exzentrizität der Zielachse am Beispiel des Laserscanners Zoller + Fröhlich Imager 5003. In: Luhmann/Müller (Hrsg.), Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik, Beiträge der Oldenburger 3D-Tage 2006, S. 174–183. Verlag Herbert Wichmann, 2006.
- Niemeier, W.: Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.
- Petrovic, S.: Bestimmung von Ziel- und Kippachsenfehler. Umdruck zur Vorlesung Vermessungskunde I an der Technischen Universität Berlin (unveröffentlicht), 1997.
- Schulz, T. und Ingensand, H.: Laserscanning – Genauigkeitsbetrachtungen und Anwendungen. In: T. Luhmann (Hrsg.), Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik, Beiträge der Oldenburger 3D-Tage 2004. Verlag Herbert Wichmann, 2004a.
- Schulz, T. und Ingensand, H.: Influencing Variables, Precision and Accuracy of Terrestrial Laser Scanners. In: Proceedings of INGE0 2004 and FIG Regional Central and Eastern European Conference on Engineering Surveying Bratislava, Slovakia, November 11–13, 2004b.
- Stahlberg, C.: Eine vektorielle Darstellung des Einflusses von Ziel- und Kippachsenfehler auf die Winkelmessung. ZfV 122, Nr. 5, S. 225–235, 1997.

Anschrift des Autors

Dr.-Ing. Frank Neitzel
 Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik
 Technische Universität Berlin
 Straße des 17. Juni 135, 10623 Berlin
 Tel.: +49 (0)30 314-24054, Fax: +49 (0)30 314-21973
 frank@mca.bv.tu-berlin.de