

Maße für die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der geschätzten Parameter in der Ausgleichung

Guido Pieper

Zusammenfassung

Die in der Ausgleichungsrechnung ermittelten Standardabweichungen der geschätzten Parameter sind allein abhängig von der Beobachtungsanordnung (Netzgeometrie), der bekannten Gewichtsmatrix und einem unbekanntem gemeinsamen Faktor (Standardabweichung der Gewichtseinheit). Mit der vorgestellten Methode kann auf einfache Weise für jeden Parameter eine Standardabweichung berechnet werden, die von den Residuen der ihn bestimmenden Beobachtungen abhängt. Außerdem wird ein Maß abgeleitet, mit dem der mögliche Einfluss von Ausreißern auf die Parameter abgeschätzt werden kann.

Summary

The parameter estimation provides a method to calculate the standard deviation of the estimated parameters depending on the known relations between the observations and the parameters, the known weight matrix of the observations and an unknown variance factor. A method is presented to easily calculate a standard deviation for each parameter which depends on the residuals of the observations defining it. Also the influence of outliers on the estimated parameters is evaluated.

1 Einführung

In der Ausgleichungsrechnung werden neben den eigentlichen unbekanntem Parametern auch deren Standardabweichungen und Korrelationen ermittelt. Die Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter, aus der die Standardabweichungen und Korrelationen abgeleitet werden, wird nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz aus der Kovarianzmatrix der Beobachtungen berechnet, die sich aus einer als bekannt vorausgesetzten Matrix (Inverse der Gewichtsmatrix) und einem unbekanntem Faktor (Varianz der Gewichtseinheit) zusammensetzt. Um die Kovarianzmatrix der Schätzwerte zu berechnen, wird außer der Kovarianzmatrix der Beobachtungen lediglich die Koeffizientenmatrix benötigt, in der sich die Beobachtungsanordnung oder Netzgeometrie niederschlägt. Dies bedeutet, dass die Kovarianzmatrix der Schätzwerte (bis auf die unbekanntem Varianz der Gewichtseinheit) ohne Messung allein aufgrund der bekannten Messanordnung und damit schon vor der eigentlichen Messung bestimmt werden kann. Zur endgültigen Berechnung der Standardabweichungen der Schätzwerte wird noch die Varianz der Gewichtseinheit benötigt, die a-priori bekannt sein kann oder aus der Quadratsumme der Residuen geschätzt werden kann.

Die so berechneten Standardabweichungen sind ein Maß für die Genauigkeit der Schätzwerte, falls die im

Modell angenommenen Standardabweichungen der Beobachtungen richtig sind. Es kann jedoch auch vorkommen, dass z. B. bei der Messung von Lagenetzen die Beobachtungen in einzelnen Punkten oder in einem Teilbereich des Netzes besonders genau oder besonders ungenau sind, und dass dies wegen fehlender Vorinformationen nicht in der Gewichtsmatrix der Beobachtungen berücksichtigt werden kann. Die Residuen der Beobachtungen zu den betreffenden Punkten sind dann besonders klein oder besonders groß. Dies schlägt sich jedoch nicht in den Standardabweichungen der geschätzten Koordinaten nieder, da zur Berechnung der Kovarianzmatrix der Schätzwerte nicht die einzelnen Residuen, sondern nur ihre Quadratsumme benötigt wird.

Ein möglicher Ansatz zur Modellierung von unbekanntem Standardabweichungen oder Gewichten der Beobachtung ist die Schätzung von Varianzkomponenten (Koch 1997). Um einen geeigneten Ansatz für die Schätzung der Varianzkomponenten zu wählen, sind jedoch Vorinformationen nötig. Die Berechnung der lokalen Standardabweichung der Punktlage, die z. B. bei der Ausgleichung von Lagenetzen in der Landesvermessung bestimmt wird (Förstner 1979), kommt dagegen ohne Vorinformationen aus, ist jedoch nicht immer sehr aussagekräftig, wie noch gezeigt wird.

Neben der Genauigkeit der geschätzten Parameter kann auch die Zuverlässigkeit der Beobachtungen und der geschätzten Parameter untersucht werden. Mit Zuverlässigkeit wird die Fähigkeit einer Parameterschätzung bezeichnet, grobe Fehler aufzudecken. Als Maß für die innere Zuverlässigkeit dient der durch einen Ausreißertest zu entdeckende Ausreißer in einer Beobachtung. Die äußere Zuverlässigkeit gibt dagegen den Einfluss eines Ausreißers auf die unbekanntem Parameter an (Baarda 1968, Koch 1997).

In der Praxis werden oft nur die Kontrolliertheit der Beobachtungen angegeben und Zuverlässigkeitsmaße für die Beobachtungen berechnet. Auch der Einfluss eines Messwertes auf die Punktlage (VPErl 1996) ist ein beobachtungsbezogenes Maß. Aus diesen beobachtungsbezogenen Maßen ist jedoch nicht ersichtlich, wie sich mögliche Ausreißer auf die Schätzwerte der unbekanntem Parameter auswirken. Einzelne Parameter können auch dann zuverlässig bestimmt sein, wenn einzelne Beobachtungen nur schlecht kontrolliert sind. Dies ist der Fall, wenn der Einfluss der unkontrollierten Beobachtungen auf diese Parameter gering ist. Besonders bei einer komplexen Messanordnung ist jedoch nicht unmittelbar erkennbar, ob ein möglicher Ausreißer in einer bestimmten Beobachtung die Schätzwerte aller Parameter oder nur einzelner Parameter verfälschen kann.

Wird z.B. ein Neupunkt einfach polar aufgenommen, dann schlägt sich ein Ausreißer nur in den Koordinaten dieses Punktes nieder. Wenn jedoch die Anschlussrichtung bei einer Polaraufnahme nicht kontrolliert ist, werden bei einem Ausreißer in dieser Richtung alle Neupunkte falsch koordiniert. Wird nur die Zuverlässigkeit der Beobachtungen betrachtet, kann dies leicht übersehen werden, denn im zweiten Fall können die Beobachtungen zur Bestimmung der Neupunkte durch Messungen zwischen diesen Punkten gut kontrolliert sein.

Das in Förstner (1979) und Koch (1997) angegebene Maß für die äußere Genauigkeit erlaubt die Untersuchung möglicher Ausreißer in jeder einzelnen Beobachtung auf die unbekannt Parameter oder Funktionen dieser Parameter. Im Gegensatz dazu wird hier eine Methode vorgestellt, um den Einfluss von möglichen Ausreißern auf die unbekannt Parameter in ihrer Summe abzuschätzen und in einem Wert pro Parameter zusammenzufassen.

2 Berechnung von Standardabweichungen

Für die folgenden Betrachtungen werden unabhängige Beobachtungen angenommen, so dass man das Gauß-Markoff-Modell

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = E(\mathbf{y})$$

$$\text{mit } D(\mathbf{y}) = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \text{ und } \mathbf{P} = \text{diag}(p_1, \dots, p_n) \quad (1)$$

erhält. Hierin ist \mathbf{X} die $n \times u$ Koeffizientenmatrix, $\boldsymbol{\beta}$ der $u \times 1$ Vektor der unbekannt Parameter, \mathbf{y} der $n \times 1$ Vektor der Beobachtungen, \mathbf{P} die $n \times n$ Gewichtsmatrix und σ^2 die Varianz der Gewichtseinheit. Zunächst wird vorausgesetzt, dass die Koeffizientenmatrix \mathbf{X} vollen Spaltenrang besitzt ($\text{rg}\mathbf{X} = u$). Nach Koch (1997) ergeben sich dann die Schätzwerte der Parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ und der Residuen $\hat{\mathbf{e}}$ sowie deren Kovarianzmatrizen aus:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{y}, \quad (2)$$

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}, \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{y}, \quad (4)$$

$$D(\hat{\mathbf{e}}) = \sigma^2(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'), \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mathbf{e}}'\mathbf{P}\hat{\mathbf{e}}/(n - u), \quad (6)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}, \quad (7)$$

$$r_i = (\mathbf{I} - \mathbf{H})_{ii}. \quad (8)$$

Die Diagonalelemente r_i der Matrix $\mathbf{I} - \mathbf{H}$, wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist, werden als Redundanzanteile bezeichnet, für die $0 \leq r_i \leq 1$ gilt, wenn die Gewichtsmatrix \mathbf{P} eine Diagonalmatrix ist (Koch 1997).

Nun soll untersucht werden, welchen Einfluss eine Änderung der Beobachtungen auf die Parameter hat. Da die geschätzten Parameter nach (2) eine lineare Funktion der Beobachtungen \mathbf{y} sind, führt eine Änderung der Beobachtungen um $\delta\mathbf{y}$ zu einer Änderung der Parameter um

$$\delta\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\delta\mathbf{y}. \quad (9)$$

Um die Änderung einer einzelnen Beobachtung auf die geschätzten Parameter zu betrachten, wird

$$\delta\mathbf{y} := \delta\mathbf{y}^{(i)}$$

$$\text{mit } \delta y_i^{(i)} \neq 0$$

$$\text{und } \delta y_j^{(i)} = 0 \text{ für } j \neq i \quad (10)$$

gesetzt. Damit ergibt sich:

$$\delta\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\delta\mathbf{y}^{(i)}. \quad (11)$$

Jede Beobachtungsänderung kann also eine Änderung jedes einzelnen Parameters bewirken. Das k -te Element $\delta\hat{\beta}_k^{(i)}$ dieses Vektors ist die Änderung des Schätzwertes des Parameters β_k , die durch eine Änderung der Beobachtung y_i um $\delta y_i^{(i)}$ bewirkt wird. Um die mögliche Änderung der geschätzten Parameter durch alle Beobachtungen abzuschätzen, wird die folgende Summe gebildet:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \sum_{i=1}^n \delta\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)}\delta\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(i)'} \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\delta\mathbf{y}^{(i)}\delta\mathbf{y}^{(i)'}\mathbf{P}\mathbf{X} \\ & \quad (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n \delta\mathbf{y}^{(i)}\delta\mathbf{y}^{(i)'}\right)\mathbf{P}\mathbf{X} \\ & \quad (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \mathbf{V} &= \sum_{i=1}^n \delta\mathbf{y}^{(i)}\delta\mathbf{y}^{(i)'} \\ &= \text{diag}((\delta y_1^{(1)})^2, \dots, (\delta y_n^{(n)})^2). \quad (12) \end{aligned}$$

Die Matrix \mathbf{Q} enthält auf der Diagonalen die Quadratsumme der Änderungen der einzelnen Schätzwerte, die durch Änderungen der einzelnen Beobachtungen verursacht werden. Setzt man in (10)

$$\delta y_i^{(i)} = 1/\sqrt{p_i}, \quad (13)$$

ergibt sich mit $\mathbf{V} = \text{diag}(1/p_1, \dots, 1/p_n) = \mathbf{P}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{V}\mathbf{P}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}. \quad (14) \end{aligned}$$

Diese Matrix ist bis auf den Faktor σ^2 mit der Kovarianzmatrix $D(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ in (3) identisch. Die nach (12) berechnete Matrix lässt sich daher bei entsprechender Berücksichtigung des Faktors σ^2 als Kovarianzmatrix interpretieren.

Diese Eigenschaft der Matrix \mathbf{Q} lässt sich auch dann ableiten, wenn die Koeffizientenmatrix \mathbf{X} nicht vollen Rang besitzt. Statt der Inversen $(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}$ ist dann eine generalisierte Inverse $(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})_{rs}^{-}$ einzuführen (Koch 1997). Im Gauß-Markoff-Modell mit nicht vollem Rang sind jedoch die Schätzwerte der unbekannt Parameter und deren Standardabweichungen nicht eindeutig, was bei der Beurteilung der berechneten Werte zu berücksichtigen ist.

Wenn für $\delta y_i^{(i)}$ ein anderer Wert als in (13) gewählt wird, können damit Kovarianzmatrizen mit unterschiedlichen Eigenschaften abgeleitet werden, wie in den beiden nächsten Abschnitten gezeigt wird.

Die Formeln zur Berechnung der Kovarianzmatrix (12) sind einfach zu programmieren. Der Rechenaufwand ist jedoch etwa so hoch wie für eine Iteration zur Berechnung der Schätzwerte (2) selbst und deren Kovarianzmatrix (3). Außerdem wird für die Berechnung die vollständige Inverse der Normalgleichungsmatrix benötigt.

3 Berechnung von lokalen Genauigkeitsmaßen

Wie bereits erläutert, können z.B. bei der Messung von Lagenetzen die Residuen in einem Teil des Netzes besonders klein oder besonders groß sein, wenn die entsprechenden Beobachtungen besonders genau oder besonders ungenau sind. Falls dies nicht bereits in der Gewichtsmatrix \mathbf{P} der Beobachtungen berücksichtigt wird, schlägt sich dies jedoch nicht in den Standardabweichungen der Koordinaten nieder. Um die Auswirkung der tatsächlich ermittelten Residuen auf die einzelnen Koordinaten zu untersuchen, setzt man

$$\delta y_i^{(i)} = \hat{\varepsilon}_i / \sqrt{r_i}. \quad (15)$$

Die nach (12) und (15) berechnete Matrix \mathbf{Q} ist abhängig von den tatsächlichen Residuen. Daher wird der Erwartungswert $E(\mathbf{Q})$ gebildet:

$$\mathbf{V} = \text{diag}(\hat{\varepsilon}_1^2/r_1, \dots, \hat{\varepsilon}_n^2/r_n), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\varepsilon}) &= E(\mathbf{X}\hat{\beta} - \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P} - \mathbf{I})E(\mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P} - \mathbf{I})\mathbf{X}\beta \\ &= \mathbf{o}, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D(\hat{\varepsilon}) &= \sigma^2(\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}') \\ &= \sigma^2(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{P}^{-1}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$V(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2 r_i / p_i \quad (\text{da } \mathbf{P} \text{ Diagonalmatrix}), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E(\hat{\varepsilon}_i^2) &= V(\hat{\varepsilon}_i) + (E(\hat{\varepsilon}_i))^2 \\ &= \sigma^2 r_i / p_i, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{V}) &= \text{diag}(E(\hat{\varepsilon}_1^2/r_1), \dots, E(\hat{\varepsilon}_n^2/r_n)) \\ &= \text{diag}((\sigma^2 r_1 / p_1) / r_1, \dots, (\sigma^2 r_n / p_n) / r_n) \\ &= \sigma^2 \text{diag}(1/p_1, \dots, 1/p_n) \\ &= \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

und schließlich:

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Q}) &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}E(\mathbf{V})\mathbf{P}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{P}(\sigma^2\mathbf{P}^{-1})\mathbf{P}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \\ &= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} \\ &= D(\hat{\beta}). \end{aligned} \quad (22)$$

Der Erwartungswert von \mathbf{Q} ist die Kovarianzmatrix der geschätzten Parameter. Die nach (12) und (15) aus den

tatsächlichen Residuen berechnete Matrix \mathbf{Q} enthält also genäherte Varianzen und Kovarianzen der geschätzten Parameter. Sie muss nicht mehr mit dem Faktor σ^2 multipliziert werden. Anders als in (3) werden die einzelnen Varianzen und Kovarianzen der Parameter jedoch aus den Residuen der jeweils bestimmenden Beobachtungen berechnet, so dass man für jeden Parameter ein lokales Genauigkeitsmaß erhält. Die aus dieser Matrix berechneten Standardabweichungen werden im Folgenden daher als lokale Standardabweichungen bezeichnet. Wenn keine Vorinformationen darüber bekannt sind, dass in einem Teilbereich eines Netzes die Beobachtungen besonders genau oder besonders ungenau sind und dies daher nicht in der Gewichtsmatrix berücksichtigt werden kann, können mit dieser Methode auf einfache Weise für jeden Punkt lokale Standardabweichungen bestimmt werden.

Probleme bei der Berechnung ergeben sich, wenn einzelne Beobachtungen nicht kontrolliert sind. Dann ist $r_i = 0$ (und damit auch $\hat{\varepsilon}_i = 0$), so dass $\delta y_i^{(i)}$ in (15) nicht berechnet werden kann. Dies liegt daran, dass aus nicht redundanten Beobachtungen keine Standardabweichungen geschätzt werden können. Um trotzdem die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} berechnen zu können, kann das entsprechende Element in \mathbf{V} gleich 0 gesetzt werden. Zur Berechnung von \mathbf{Q} werden dann nur die redundanten Beobachtungen genutzt. Damit bleibt jedoch ein möglicher Einfluss der unkontrollierten Beobachtungen auf die geschätzten Parameter unberücksichtigt. Bei diesem Vorgehen können kleine Werte in \mathbf{Q} bedeuten, dass die entsprechenden Parameter besonders genau bestimmt wurden oder dass die sie bestimmenden Beobachtungen nicht kontrolliert sind. Zur Unterscheidung dieser Fälle ist daher zu untersuchen, ob einzelne Beobachtungen unkontrolliert sind und auf welche Parameter sich diese unkontrollierten Beobachtungen auswirken.

4 Einfluss von Ausreißern

Bei Ausreißertests wird die normierte Verbesserung $\hat{\varepsilon}_i / (\hat{\sigma} \sqrt{r_i/p_i})$ (Testgröße) mit einer Konstanten c (kritischer Wert) verglichen. Ist der Betrag der normierten Verbesserung größer als diese Konstante, wird ein Ausreißer in der Beobachtung y_i vermutet und diese Beobachtung aus der Ausgleichung ausgeschlossen. Der Schätzwert des Ausreißers ist dann $\hat{\nabla} y_i = -\hat{\varepsilon}_i / r_i$ (Koch 1997, Förstner 1979). Bei diesem Test wird ein Ausreißer nicht erkannt, wenn $|\hat{\varepsilon}_i| \leq c \hat{\sigma} \sqrt{r_i/p_i}$ ist. Für den Schätzwert des nicht erkannten Ausreißers gilt dann $|\hat{\nabla} y_i| \leq c \hat{\sigma} / \sqrt{r_i p_i}$.

Um die Auswirkung von Ausreißern, die beim Ausreißertest nicht erkannt werden, auf die geschätzten Parameter abzuschätzen, wird daher

$$\delta y_i^{(i)} = 1 / \sqrt{r_i p_i} \quad (23)$$

gesetzt, wobei der für alle Beobachtungen gleiche Faktor $c \hat{\sigma}$ zunächst weggelassen wird. Damit ergibt sich

$$\mathbf{V} = \text{diag}(1/(r_1 p_1), \dots, 1/(r_n p_n)). \quad (24)$$

Mit dieser Matrix V kann wieder die Kovarianzmatrix Q nach (12) berechnet werden. Bei unkontrollierten Beobachtungen ist die Berechnung von (23) nicht möglich, da dann $r_i = 0$ ist. Um trotzdem die Kovarianzmatrix Q berechnen zu können und auch den Einfluss unkontrollierter Beobachtungen auf die unbekannt Parameter zu berücksichtigen, kann für $r_i \leq \varepsilon^2$ der Wert $1/\sqrt{\varepsilon^2 p_i}$ in (23) eingesetzt werden. Der Wert ε^2 sollte so gewählt werden, dass sich der Einfluss von unkontrollierten Beobachtungen deutlich vom Einfluss der kontrollierten Beobachtungen unterscheidet (z. B. $\varepsilon^2 = 1/100^2$). Im Beispiel in Abschnitt 5.3 wird etwas näher auf die Wahl von ε^2 eingegangen.

Ein Vergleich der mit (23) berechneten Matrix Q und der inversen Normalgleichungsmatrix $(X'PX)^{-1}$ gibt Aufschluss darüber, wie gut einzelne Parameter kontrolliert sind. Ein Maß für die Kontrolliertheit eines Parameters ist das Verhältnis

$$k_i = (X'PX)_{ii}^{-1} / Q_{ii} = \hat{\sigma}^2 (X'PX)_{ii}^{-1} / \hat{\sigma}^2 Q_{ii}. \quad (25)$$

Der Wert k_i kann ähnlich wie der Redundanzanteil einer Beobachtung interpretiert werden, wie die folgende Überlegung zeigt: Sind die Redundanzanteile aller Beobachtungen gleich ($r_i = \bar{r}$), erhält man $V = (1/\bar{r})P^{-1}$ und damit $Q = (1/\bar{r})(X'PX)^{-1}$ und schließlich $k_i = \bar{r}$. Aus dem Vergleich von (13) und (23) folgt für die Diagonalelemente $Q_{ii} \geq (X'PX)_{ii}^{-1}$, so dass $0 \leq k_i \leq 1$ gilt. Je näher k_i bei 1 liegt, desto besser sind die Beobachtungen zur Bestimmung des Parameters β_i und damit auch dieser Parameter kontrolliert.

Mit Hilfe der nach (12) und (23) berechneten Matrix Q kann auch der maximale Einfluss von nicht erkannten Ausreißern auf die unbekannt Parameter abgeschätzt werden. Dazu werden die aus der Matrix Q berechneten Standardabweichungen mit den Werten für c und $\hat{\sigma}$, mit denen der Ausreißertest durchgeführt wurde, multipliziert.

Zur Berechnung der Matrix Q werden keine Beobachtungen benötigt, so dass sie bereits vor der eigentlichen Messung aufgrund der geplanten Beobachtungsanordnung bestimmt werden kann. Damit ist eine Beurteilung und eventuell Verbesserung der Beobachtungsanordnung vor der eigentlichen Messung möglich.

Im Gauß-Markoff-Modell mit nicht vollem Rang ist die oben beschriebene Beurteilung der Kontrolliertheit der geschätzten Parameter nicht ohne weiteres möglich. Zur Beseitigung des Rangdefekts werden in der Regel Restriktionen eingeführt. Die geschätzten Parameter und deren Standardabweichungen sind abhängig von den gewählten Restriktionen. Wird bei einer freien Netzausgleichung auf alle Punkte aufgefördert und befinden sich unkontrollierte Punkte darunter, wirken sich Änderungen in den Beobachtungen zur Bestimmung dieser Punkte auf die Lagerung des Netzes und damit auf die Koordinaten aller Punkte aus. Das Verhältnis k_i in (25) ist deshalb für alle Punkte sehr klein, so dass scheinbar alle Punkte unkontrolliert sind. Wenn dieses Verhältnis im Gauß-Markoff-

Modell mit nicht vollem Rang zur Beurteilung der Kontrolliertheit der Parameter benutzt werden soll, müssen die Restriktionen daher so gewählt werden, dass dieser Einfluss ausgeschaltet wird. Dies bedeutet bei der freien Netzausgleichung, dass nicht auf die eindeutig bestimmten Punkte aufgefördert werden darf.

5 Beispiele

5.1 Vergleich mit der lokalen Standardabweichung der Punktlage

Bei der Berechnung der lokalen Standardabweichung der Punktlage ($\sigma_{P_j,lok}$) wird die für die gesamte Kovarianzmatrix in (3) einheitliche Varianz der Gewichtseinheit, die nach (6) geschätzt wird, durch eine für jeden einzelnen Punkt berechnete Varianz ersetzt. Diese für jeden einzelnen Punkt P_j berechnete Varianz

$$\hat{\sigma}_j^2 = \sum_i p_i \hat{e}_i^2 / \sum_i r_i \quad (26)$$

wird aus den Residuen derjenigen Beobachtungen y_i berechnet, die diesen Punkt betreffen, und dann mit den entsprechenden Elementen der Matrix $(X'PX)^{-1}$ multipliziert (Förstner 1979). Die so ermittelte Standardabweichung wird in der Landesvermessung als lokales Genauigkeitsmaß der Punktlage benutzt.

Der Unterschied zu der nach (12) und (15) bestimmten lokalen Standardabweichung soll anhand eines einfachen Nivellements erläutert werden. Vom Festpunkt P_0 mit der Höhe $H_0 = 0$ wird zum Neupunkt P_A und dann zum Neupunkt P_B mit den Höhen H_A und H_B nivelliert. Die Höhendifferenzen werden doppelt gemessen und sind gleich genau. Die Beobachtungsgleichungen und die daraus berechneten Kovarianzen ergeben sich dann zu:

$$E(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_A \\ H_B \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\hat{D}(\hat{\beta}) = \frac{\hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 + \hat{e}_3^2 + \hat{e}_4^2}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 & \hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 \\ \hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 & \hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 + \hat{e}_3^2 + \hat{e}_4^2 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\hat{\sigma}_{A,lok}^2 = \frac{\hat{e}_1^2 + \hat{e}_2^2 + \hat{e}_3^2 + \hat{e}_4^2}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad (30)$$

$$\hat{\sigma}_{B,lok}^2 = \frac{\hat{e}_3^2 + \hat{e}_4^2}{1} \cdot 1. \quad (31)$$

Die nach (12) und (15) berechnete Standardabweichung der Höhe des Punktes P_A (s. Q_{11} in (29)) hängt allein von den Residuen der ersten beiden Beobachtungen, d. h. den Nivellements von P_0 nach P_A , ab, da die Höhe des Punktes P_A durch diese beiden Messungen bestimmt wird. Die beiden weiteren Messungen tragen nichts zur Bestimmung des Punktes P_A bei. Bei der Standardabweichung

der Höhe des Punktes P_B (s. Q_{22} in (29)) kommt zusätzlich noch ein Anteil aus den Residuen der beiden anderen Messungen hinzu, da diese Höhe von der Höhe des Punktes P_A und von den beiden weiteren Messungen abhängt.

Bei der Berechnung der lokalen Standardabweichung nach (3) und (26) werden die Residuen aller Beobachtungen benutzt, die den Punkt betreffen. Daher werden die Residuen der Höhendifferenzen zwischen den Punkten P_A und P_B zur Berechnung der lokalen Standardabweichung der Höhe H_A (s. (30)) verwendet, obwohl sie nichts zur Bestimmung dieser Höhe beitragen. Umgekehrt werden die Residuen der ersten beiden Beobachtungen nicht zur Berechnung der lokalen Standardabweichung der Höhe H_B (s. (31)) verwendet, da die Höhe H_B nicht in den ersten beiden Beobachtungsgleichungen vorkommt. Es wird also nicht unterschieden, ob eine Beobachtung zur Bestimmung eines Parameters beiträgt oder ob die Beobachtung in Verbindung mit diesem Parameter zur Bestimmung eines anderen Parameters dient. Dies liegt daran, dass anhand der einzelnen Beobachtungsgleichungen nicht beurteilt werden kann, ob eine Beobachtung zur Bestimmung eines Parameters beiträgt. Z.B. könnten die Messungen der Höhendifferenz zwischen den Punkten P_A und P_B auch zur Bestimmung der Höhe H_A beitragen, wenn vom Punkt P_B noch zu einem weiteren Festpunkt nivelliert würde. Anschlussmessungen haben nur dann einen Einfluss auf die lokale Standardabweichung von Neupunkten, wenn sie direkt zwischen dem Anschlusspunkt und dem Neupunkt gemessen werden.

Außerdem werden bei der Berechnung der lokalen Standardabweichung nach (12) und (15) Korrelationen zwischen den einzelnen Parametern bestimmt, was bei der Berechnung der lokalen Standardabweichung nach (3) und (26) nicht möglich ist.

5.2 Genauigkeitsmaße in einem Streckennetz

Am Beispiel eines kleinen Streckennetzes (s. Abb. 1) werden verschiedene Genauigkeitsmaße berechnet und die Ergebnisse diskutiert.

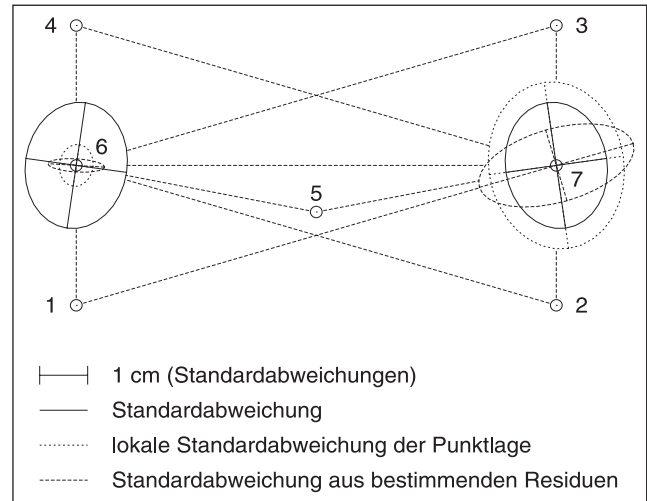


Abb. 1: Streckennetz mit zwei Neupunkten

Von den Festpunkten 1 bis 5 sind jeweils Strecken zu den Neupunkten 6 und 7 gemessen worden. Die gemessenen Strecken, die Residuen und die Redundanzanteile sind in Tab. 1 und die Standardabweichungen der berechneten Koordinaten in Tab. 2 angegeben.

Die nach (3) und (6) berechneten Standardabweichungen sind wegen der symmetrischen Messungsanordnung bei beiden Punkten gleich. Die unterschiedlich großen Residuen der Streckenmessungen zu Punkt 6 und zu Punkt 7 haben keinen Einfluss auf diese Standardabweichungen.

Die lokale Standardabweichung der Punktlage wird gewöhnlich nicht für die einzelnen Koordinaten, sondern nur für die Lage eines Punktes berechnet (VPERl 1996). In Tab. 2 sind deshalb nicht die Werte für die einzelnen Koordinaten angegeben. Da nur die Varianz in (3) für jeden Punkt einzeln bestimmt und mit den entsprechenden Elementen in $(X'PX)^{-1}$ multipliziert wird, ändert sich nur die Größe und nicht die Form und Richtung der in Abb. 1 dargestellten Ellipsen.

Bei der Berechnung der Standardabweichung nach (12) und (15) wird dagegen für jeden einzelnen Parameter die Standardabweichung neu berechnet. Daher haben die entsprechenden Ellipsen in Abb. 1 nicht nur andere Größen, sondern auch andere Richtungen und Formen. In ih-

Tab. 1: Beobachtungen im Streckennetz

Strecke	y_i (m)	\hat{e}_i (m)	r_i
1 - 6	30.000	-0.000	0.54
2 - 6	104.395	0.009	0.72
3 - 6	104.401	0.003	0.69
4 - 6	30.000	0.000	0.54
5 - 6	50.998	-0.007	0.72
1 - 7	104.436	-0.039	0.72
2 - 7	30.000	0.000	0.54
3 - 7	30.010	-0.010	0.54
4 - 7	104.380	0.017	0.69
5 - 7	50.957	0.027	0.72
6 - 7	100.000	-0.005	0.58

Tab. 2: Standardabweichungen im Streckennetz

Punkt	$\hat{\sigma}_{Lage}$ (m)	$\hat{\sigma}_{RW}$ (m)	$\hat{\sigma}_{HW}$ (m)	$\hat{\sigma}_{max}$ (m)	$\hat{\sigma}_{min}$ (m)	t_{max} (gon)
Standardabweichung nach (3) und (6)						
6	0.017	0.011	0.014	0.0136	0.0106	9.0
7	0.017	0.011	0.014	0.0136	0.0106	191.0
lokale Standardabweichung der Punktlage						
6	0.006					
7	0.023					
Standardabweichung nach (12) und (15)						
6	0.006	0.006	0.001	0.0059	0.0014	104.0
7	0.018	0.016	0.009	0.0167	0.0079	81.8

nen schlägt sich deutlich nieder, dass die Residuen der zu Punkt 6 gemessenen Strecken wesentlich kleiner sind als die Residuen der Strecken zu Punkt 7. Es ist auch zu erkennen, dass die Residuen der in Nord-Süd-Richtung gemessenen Strecken besonders klein sind.

5.3 Einfluss eines Ausreißers in einer Anschlussrichtung

In diesem Beispiel wird der Einfluss einer unkontrollierten Anschlussrichtung auf die Neupunkte untersucht. Bei der in Abb. 2 dargestellten Messung wurde vom Festpunkt 1 eine Anschlussrichtung zum Festpunkt 2 gemessen und dann die Neupunkte 3 bis 6 polar aufgenommen. Zwischen den Neupunkten wurden Strecken gemessen. Durch diese Streckenmessungen werden alle Beobachtungen außer der Anschlussrichtung kontrolliert ($r_i \geq 0.33$, s. Tab. 3). Damit sich die berechneten Standardabweichungen gut als Ellipsen darstellen lassen, wurden die Standardabweichungen nach (12) und (23) mit dem relativ großen Wert $\varepsilon^2 = 1/10^2$ berechnet. Um sie mit den nach (3) und (6) berechneten Standardabweichungen vergleichen zu können, sind sie mit demselben Faktor $\hat{\sigma}$ multipliziert worden.

Aus den Standardabweichungen in Tab. 4 und besonders aus der Darstellung in Abb. 2 ist gut abzulesen, wie sich ein möglicher Ausreißer in der Anschlussrichtung auf die Koordinaten der Neupunkte auswirkt. Die dargestellten Ellipsen zeigen deutlich, in welche Richtung die Bestimmung der Koordinaten nicht kontrolliert ist. Aus den Redundanzanteilen der Beobachtungen in Tab. 3 ist zwar zu erkennen, dass die Anschlussrichtung unkontrolliert ist. Wie sich das auf die Schätzwerte der Parameter auswirkt, ist jedoch besonders bei größeren Netzen nicht direkt ersichtlich. Die Beobachtungen, die die Neupunkte unmittelbar betreffen, sind in diesem Beispiel jedenfalls kontrolliert.

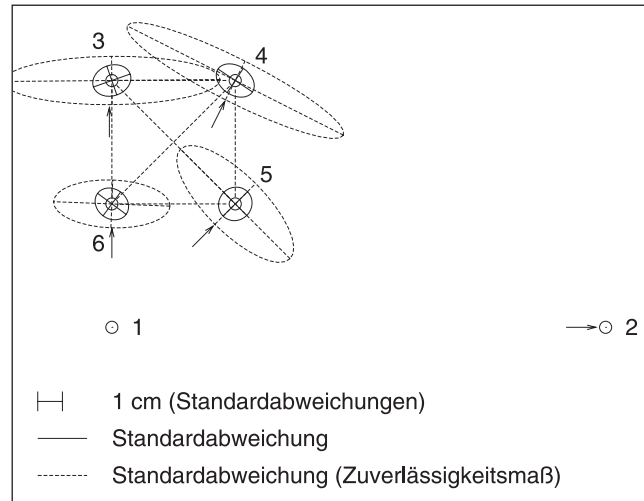


Abb. 2: Polaraufnahme mit Streckenmessungen

Der Einfluss der unkontrollierten Anschlussrichtung auf die Neupunkte lässt sich auch ohne Messwerte allein aufgrund der bekannten Messkonfiguration untersuchen. Die Messwerte werden lediglich benötigt, um die Varianz der Gewichtseinheit zu schätzen. Wenn in diesem Beispiel statt der geschätzten Standardabweichung der Gewichtseinheit ($\hat{\sigma} = 0.85$) z.B. $\sigma = 1$ gesetzt wird, vergrößern sich alle Standardabweichungen in Tab. 4 um den Faktor $1/0.85$.

Die Standardabweichung $\hat{\sigma}_{\max}$ der einzelnen Punkte wird in diesem Beispiel etwa um den Faktor 3 bis 6 vergrößert. Dies liegt an dem Verhältnis der Strecken vom Standpunkt zum Anschlusspunkt und zu den Neupunkten sowie an der Wahl des Wertes $\varepsilon^2 = 1/10^2$. Da die Strecke z.B. zu Punkt 3 halb so groß ist wie zum Anschlusspunkt, wirkt sich eine Änderung in der Anschlussrichtung etwa zur Hälfte auf die Lage des Punktes 3 aus, was zu einem Faktor von etwa $10/2 = 5$ führt. In der Praxis sollte ε^2 kleiner gewählt werden, damit der Einfluss unkontrollierter Beobachtungen noch besser zu erkennen ist und unkontrollierte Parameter besser von kontrollier-

Tab. 3: Beobachtungen in Polaraufnahme

Beobachtung	y_i (m oder gon)	σ_{y_i}	r_i
Richtung 1 2	100.0000	0.0064	0.00
Strecke 1 3	50.000	0.010	0.43
Richtung 1 3	0.0000	0.0127	0.43
Strecke 1 4	55.900	0.010	0.51
Richtung 1 4	29.5100	0.0114	0.35
Strecke 1 5	35.350	0.010	0.33
Richtung 1 5	50.0200	0.0180	0.53
Strecke 1 6	25.000	0.010	0.43
Richtung 1 6	0.0000	0.0255	0.43
Strecke 3 4	25.000	0.010	0.40
Strecke 4 5	25.000	0.010	0.40
Strecke 5 6	25.000	0.010	0.40
Strecke 6 3	25.000	0.010	0.40
Strecke 3 5	35.340	0.010	0.47
Strecke 4 6	35.340	0.010	0.47

Tab. 4: Standardabweichungen in Polaraufnahme

Punkt	$\hat{\sigma}_{\text{Lage}}$ (m)	$\hat{\sigma}_{\text{RW}}$ (m)	$\hat{\sigma}_{\text{HW}}$ (m)	$\hat{\sigma}_{\text{max}}$ (m)	$\hat{\sigma}_{\text{min}}$ (m)	t_{max} (gon)
Standardabweichung nach (3) und (6)						
3	0.010	0.008	0.006	0.0079	0.0062	78.5
4	0.010	0.008	0.007	0.0084	0.0059	137.4
5	0.010	0.007	0.007	0.0070	0.0066	50.0
6	0.009	0.007	0.006	0.0072	0.0060	140.4
Standardabweichung nach (12) und (23)						
3	0.045	0.044	0.010	0.0439	0.0098	99.4
4	0.050	0.044	0.024	0.0491	0.0088	129.8
5	0.033	0.024	0.024	0.0314	0.0117	150.0
6	0.026	0.024	0.010	0.0236	0.0097	102.4

ten zu unterscheiden sind. Bei der Wahl von ε^2 ist auch zu berücksichtigen, dass der Einfluss einzelner Beobachtungen auf die Schätzwerte der Parameter gering sein kann, wie das bei Anschlussrichtungen zu sehr weit entfernten Zielen der Fall ist.

6 Zusammenfassung

Es wurde eine Methode zur Berechnung von Standardabweichungen vorgestellt, mit denen die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der geschätzten Parameter beurteilt werden kann.

Die Standardabweichung aus den Residuen derjenigen Beobachtungen, durch die ein Parameter bestimmt wird, erlaubt die Ermittlung einer für jeden Parameter individuellen Standardabweichung als Genauigkeitsmaß für diesen Parameter. Mit dieser Methode lässt sich z. B. in Lagernetzen, in denen einzelne Bereiche oder Punkte besonders genau oder besonders ungenau bestimmt sind, ohne Vorinformationen leicht die Genauigkeit jedes einzelnen Punktes ermitteln.

Außerdem ist eine einfache Abschätzung möglich, welchen Einfluss mögliche Ausreißer auf die Schätzwerte der unbekannt Parameter haben. Aus dem Redundanzanteil einer Beobachtung ist nicht unmittelbar ersichtlich, wie sich eine Änderung der Beobachtung auf die Parameter

auswirkt. Im Gegensatz dazu sind die hier berechneten Maße auf die Parameter bezogen und erlauben damit eine Beurteilung der Zuverlässigkeit und Kontrolliertheit der Parameter.

Die vorgestellten Formeln sind leicht zu programmieren. Allerdings ist der Rechenaufwand etwa so groß wie für eine Iteration zur Berechnung der eigentlichen Schätzwerte und deren Kovarianzmatrix.

Literatur

- Baarda, W.: A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks. Publications on Geodesy, Vol. 2, No. 5, Netherlands Geodetic Commission, Delft, 1968.
- Förstner, W.: Das Rechenprogramm TRINA für geodätische Lagernetze der Landesvermessung. Nachrichten aus dem öffentlichen Vermessungsdienst NRW, Heft 2/1979, S. 125–166, 1979.
- Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler, Bonn, 1997.
- Die Bestimmung von Vermessungspunkten der Landesvermessung in NRW – Vermessungspunkterlass (VPErl.) – vom 12.1.1996. Landesvermessungsamt NRW, Bonn, 1996.

Anschrift des Autors
Dipl.-Ing. Guido Pieper
Klimberg 2
59929 Brilon
Tel.: 02961 989036
gpieper@cityweb.de