

Transformation des Deutschen Hauptdreiecknetzes DHDN in das Europäische Terrestrische Referenzsystem ETRS89

Dieter Lelgemann und Martin Noak

Zusammenfassung

Zur Transformation des DHDN in das ETRS89 werden geeignete Formeln, die auch die großen systematischen Deformationen des DHDN berücksichtigen, sowie entsprechende Transformationsparameter angegeben. Die mittleren quadratischen Restklaffungen der Koordinaten der Passpunkte nach der Transformation liegen bei ±10 cm. Für viele Aufgaben des Geoinformationswesens mag deshalb diese einfache Transformation ausreichend sein.

Summary

For a transformation of DHDN into ETRS89 suitable formulas and corresponding transformation parameters are given by taking also into account the large systematic deformations of the DHDN. The mean deviations of the coordinates of the reference points after the transformation are of the order of ±10 cm. Therefore, for many purposes of geomatics this simple transformation will be sufficient.

1 Einleitung

Bei der Verwendung von Geoinformationen für die verschiedensten Zwecke tritt häufig die Aufgabe auf, die räumliche Information, gegeben in Form von Koordinaten, von einem Bezugssystem in ein anderes zu transformieren.

Zur Vereinheitlichung der europäischen nationalen Bezugssysteme hat die AdV folgenden Beschluss gefasst: Alle amtlichen Koordinaten sind umzuformen vom System des Deutschen Hauptdreiecknetzes DHDN in das European Terrestrial Reference System 1989 (ETRS89), das sich auf das Globale Positionierungssystem GPS stützt. Das erfolgt zweckmäßigerweise in zwei Schritten. Man führt zunächst eine generelle Systemtransformation durch, wobei die großen systematischen Deformationen mit zu berücksichtigen sind. Die verbleibenden Restklaffungen von der Größenordnung ±10 cm sind dann anhand weiterer lokaler Passpunkte zu beseitigen, wenn es auf höchste Genauigkeit ankommt. Kommt es nicht auf höchste Genauigkeit an, z. B. bei der Transformation von Karten, sind der erste Schritt und damit die im Folgenden angegebenen Transformationsformeln und -parameter völlig ausreichend.

2 Zum geodätischen Datum des DHDN

Jedes Bezugssystem, so auch das DHDN, erfordert zu seiner Festlegung die **Definition**

- einer orthonormierten Basis (Richtungen der kartesischen Koordinatenachsen),
- eines Ursprungs sowie
- eines Maßstabes.

Zur Festlegung einer orthonormierten Basis benötigt man mindestens zwei real vorgegebene Richtungen. Im Falle des DHDN ist das zunächst die Lotrichtung bzw. Zenitrichtung \vec{e}_z im Fundamentalpunkt Rauenberg des DHDN. Diese wird ergänzt durch die horizontale Richtung \vec{e}_A im Fundamentalpunkt zu einem Azimutreferenzpunkt (Marienkirche in Berlin) als zweite real vorgegebene Richtung. Die Zenitrichtung \vec{e}_z wird beschrieben durch den Einheitsvektor,

$$\vec{e}_z = \begin{bmatrix} \cos \phi & \cos \Lambda \\ \cos \phi & \sin \Lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{e}^1 \\ \vec{e}^2 \\ \vec{e}^3 \end{bmatrix}_{\text{DHDN}} \quad (1)$$

(Λ = astronomische Länge, ϕ = astronomische Breite).

Die horizontale Richtung \vec{e}_A wird im lokalen Zenitsystem ZFR des Fundamentalpunktes Rauenberg mittels folgender Komponenten beschrieben (A = Azimut):

$$\vec{e}_A = \begin{bmatrix} \cos A \\ \sin A \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{e}^1 \\ \vec{e}^2 \\ \vec{e}^3 \end{bmatrix}_{\text{ZFR}} \quad (2)$$

Durch Vorgabe (grundsätzlich zunächst beliebiger) numerischer Werte für Λ , ϕ , A wurden die Richtungen der Koordinatenachsen des DHDN **definiert**. Mittels folgender Werte wurde das DHDN den globalen geographischen Systemen von Ferro bzw. Greenwich angepasst:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{DHDN}} &= 52^\circ 27' 12,021, \\ \Lambda_{\text{DHDN}} &= 31^\circ 02' 04,928 \text{ (Ferro) bzw.} \\ &\quad 13^\circ 22' 04,928 \text{ (Greenwich),} \\ A_{\text{DHDN}} &= 19^\circ 46' 04,87. \end{aligned}$$

Seien ϕ_{ETRS} , Λ_{ETRS} und A_{ETRS} die Werte, die sich in Rauenberg bezüglich des ETRS89 ergeben würden. Die Differenzen

$$\begin{bmatrix} \delta\phi \\ \delta\Lambda \\ \delta A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \Lambda \\ A \end{bmatrix}_{\text{ETRS}} - \begin{bmatrix} \phi \\ \Lambda \\ A \end{bmatrix}_{\text{DHDN}} \quad (3)$$

können dann als drei (kleine) Rotationsparameter aufgefasst werden, die die Drehung des Systems des DHDN in das ETRS89 beschreiben.

Diese sind mit den gebräuchlichen Kardan-Rotationswinkeln ε_i um die drei Koordinatenachsen verknüpft durch

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta A \cos \phi_F \\ \delta\phi \\ \delta A \sin \phi_F - \delta\Lambda \end{bmatrix}, \quad [\bar{\varepsilon}_i] = \begin{bmatrix} 3 \\ R \end{bmatrix} (\Lambda_F) [\varepsilon_i]. \quad (4)$$

Zur Definition des Ursprungs des DHDN wurden ferner dem Fundamentalpunkt Rauenberg folgende numerischen Werte für Lotabweichungskomponenten bzw. Höhenanomalie zugewiesen:

$$\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0. \quad (5)$$

Damit ergeben sich speziell und nur für den Fundamentalpunkt Rauenberg:

$$\varphi = \phi, \lambda = \Lambda \text{ und } h = H.$$

Weiterhin wurde das 1841 von Bessel berechnete Ellipsoid als Referenzellipsoid eingeführt:

$$a = 6377397 \text{ m}, \quad 1/f = 299,15.$$

Im System DHDN erhält man dann für den Fundamentalpunkt Rauenberg (N = Normalkrümmungshalbmesser) die kartesischen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{e}^1 \\ \bar{e}^2 \\ \bar{e}^3 \end{bmatrix}_{\text{DHDN}} = \begin{bmatrix} (N+h) \cos \phi \cos \lambda \\ (N+h) \cos \phi \sin \lambda \\ (N(1-e^2)+h) \sin \phi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{e}^1 \\ \bar{e}^2 \\ \bar{e}^3 \end{bmatrix}_{\text{DHDN}} \quad (6)$$

$$\text{mit } N = a(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-1/2}.$$

Ausgehend vom Fundamentalpunkt definieren diese numerischen Werte den Ursprung des DHDN-Systems.

3 Systematische Deformationen des DHDN

Mittels GPS-Beobachtungen auf Festpunkten in der Umgebung des Fundamentalpunktes Rauenberg wurden

dessen kartesische Koordinaten im System ETRS89 bestimmt, wie im Abschnitt 4 angegeben, womit sich zunächst der Translationsvektor zwischen DHDN und ETRS89 ergibt. Als schwieriger erwies sich die Bestimmung der Rotationsparameter und des Maßstabsfaktors wegen der großen systematischen Deformationen des DHDN.

Große systematische Deformationen des DHDN entstanden bei der Anfelderung der einzelnen Landesnetze (Preußen, Sachsen, Bayern) zu dem einheitlichen System des DHDN. Umfangreiche Testrechnungen zeigten zunächst, dass das DHDN keinen signifikanten Maßstabsunterschied gegenüber dem ETRS89 aufweist. Hingegen zeigte sich in den einzelnen Bundesländern ein signifikantes Maßstabsgefälle in Richtung Rauenberg. Ein derartiges Maßstabsgefälle lässt sich als Funktion einer Höhenänderung δh des Referenzellipsoides im Fundamentalpunkt modellieren. Ausgehend von Heiskanen und Moritz (1967, S. 207, Formel (5-57)) erhält man für die Koordinatenänderungen δy_i im nordorientierten lokalen Zenitsystem der einzelnen Festpunkte P ($\delta h = R\delta\kappa$; ψ = Winkeldistanz zwischen P und Fundamentalpunkt)

$$\begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \delta\phi \\ \cos \phi \delta\lambda \\ \delta h/R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \alpha \\ \sin \psi \sin \alpha \\ 1 - 2 \sin^2(\psi/2) \end{bmatrix} \delta h = R \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \alpha \\ \sin \psi \sin \alpha \\ 1 - 2 \sin^2(\psi/2) \end{bmatrix} \delta\kappa. \quad (7)$$

Orientiert man das lokale Zenitsystem mittels einer Azimutdrehung in die Richtung zu Rauenberg

$$[\delta \bar{y}_i] = \begin{bmatrix} 3 \\ R \end{bmatrix} (\alpha) [\delta y_i], \quad (8)$$

erhält man

$$\begin{bmatrix} \delta \bar{y}_1 \\ \delta \bar{y}_2 \\ \delta \bar{y}_3 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \delta\psi \\ 0 \\ \delta h/R \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \psi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta h = R \begin{bmatrix} \psi \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta\kappa. \quad (9)$$

Als Ergebnis einer Variation von δh im Fundamentalpunkt treten also auf

- ein radialsymmetrisches entfernungsabhängiges Maßstabsgefälle $\psi\delta h$
- ein (nicht vorhandener) homogener Maßstabseffekt $m = (1 + \delta h/R) = (1 + \delta\kappa)$.

Weiterhin ist für die Netze der einzelnen Bundesländer eine kleine individuelle Starrkörperdrehung auf einer Kugel zu verzeichnen. Diese kann beispielsweise durch

drei Drehwinkel $\delta\alpha$, $\delta\varphi$ und $\delta\lambda$ im Fundamentalpunkt parametrisiert werden. Damit ergibt sich eine Parametrisierung der systematischen Deformationen der einzelnen Bundesländer durch je vier Parameter. Die Komponenten des Deformationsvektors $D\vec{y}$ im jeweiligen nordorientierten Zenitsystem der Festpunkte P erhält man mittels ($R = 6371 \text{ km} = \text{mittlerer Erdradius}$)

$$\begin{bmatrix} Dy_1 \\ Dy_2 \\ Dy_3 \end{bmatrix}_{ZP} = R \begin{bmatrix} \sin\psi \cos\alpha & \sin\psi \sin\alpha & 1 & 0 \\ \sin\psi \sin\alpha & -\sin\psi \cos\alpha & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\alpha \\ \delta\kappa \\ \delta\varphi \\ \delta\lambda \end{bmatrix} \quad (10)$$

Damit ergeben sich die Komponenten des Deformationsvektors im System des DHDN zu

$$[Dy_i]_{DHDN} = \begin{bmatrix} 3 \\ R(\lambda) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 \\ R(90 - \varphi) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ S \end{bmatrix} [Dy_i]_{ZP}, \quad (11)$$

wobei die Spiegelung S die Transformation des lokalen Linkssystems (Nordazimutsystem) in ein lokales Rechtssystem (Südazimutsystem) bewirkt.

Abschließend ergibt sich als funktionales Modell zur Beschreibung der Systemtransformation

$$[x_i]_{ETRS} - [\Delta x_i] = m [R(\varepsilon_i)] \{ [x_i]_{DHDN} + [Dy_i] \}, \quad (12)$$

Bei vorgegebenem DHDN-Translationsvektor $\Delta\vec{x}$ treten dabei als verbleibende Unbekannte auf:

- m = Maßstabsfaktor des DHDN
- ε_i = Rotationsparameter des DHDN

sowie $\delta\kappa$, $\delta\alpha$, $\delta\varphi$, $\delta\lambda$ = Deformationsparameter für jedes einzelne Bundesland.

4 Transformation des DHDN in das ETRS89

Anhand von GPS-Messungen in Berlin einerseits und von Passpunkten des Hauptdreiecknetzes 1. Ordnung andererseits wurden folgende Transformationsparameter für das DHDN-System ermittelt:

$$\Delta\vec{x} = \begin{bmatrix} 645,60 \pm 1,42\text{m} \\ 14,05 \pm 1,84\text{m} \\ 445,00 \pm 1,04\text{m} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \vec{e}^1 \\ \vec{e}^2 \\ \vec{e}^3 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon_i] = \begin{bmatrix} 1,082 \pm 0,080'' \\ 0,626 \pm 0,058'' \\ 0,842 \pm 0,093'' \end{bmatrix}.$$

Für den Maßstabsfaktor m war keine signifikante Abweichung von 1 feststellbar; der Maßstab des DHDN und des ETRS89 stimmen überein.

Für diejenigen Bundesländer, für die Vergleichswerte vorlagen, ergaben sich ferner die in Tab. 1 aufgelisteten Deformationsparameter.

Für die Menge aller gegebenen Passpunkte verblieben die in Tab. 2 aufgelisteten maximalen Residuenwerte, hier getrennt nach den einzelnen Bundesländern.

Tab. 2: Maximale Residuen der Passpunkte nach Transformation DHDN-ETRS89

Bundesland	dx_1 in [cm] (Nord-Süd)	dy_2 in [cm] (Ost-West)
Berlin	- 2 + 2	- 2 + 3
Sachsen	- 3 + 5	- 9 + 3
Bayern	-25 + 18	-19 + 28
Niedersachsen	- 8 + 7	-10 + 9
Baden-Württemberg	-14 + 22	-18 + 24
Hessen	- 7 + 9	-15 + 18
Rheinland-Pfalz/Saarland	- 9 + 10	- 9 + 11
Nordrhein-Westfalen	-12 + 10	-13 + 13

Soweit Geoinformationssysteme nicht der höchsten Genauigkeit bedürfen, beispielsweise für rein kartographische Zwecke, sollte die mittels obiger Parameter durchgeführte Transformation amtlicher Koordinaten in das System ETRS89 ausreichend sein. Vorsicht ist nur geboten an und in der Nähe der Grenzen zwischen den einzelnen Bundesländern.

Tab. 1: Parameter zur Beschreibung der systematischen Deformationen des DHDN

Bundesland	δA in ["]	$d\varphi$ in ["]	$d\lambda$ in ["]	δh in [m]
Berlin	0.246 ± 0.336	-0.059 ± 0.001	-0.227 ± 0.001	-0.587 ± 9.887
Sachsen	0.823 ± 0.082	-0.060 ± 0.003	0.126 ± 0.003	-18.457 ± 3.307
Bayern	-0.486 ± 0.029	-0.027 ± 0.002	0.090 ± 0.002	-35.897 ± 0.899
Niedersachsen	1.845 ± 0.035	-0.092 ± 0.002	0.165 ± 0.002	-59.990 ± 1.353
Baden-Württemberg	-1.354 ± 0.063	0.058 ± 0.004	0.068 ± 0.006	-62.836 ± 1.747
Hessen	-0.008 ± 0.111	0.007 ± 0.006	0.154 ± 0.006	-70.155 ± 2.383
Rheinland-Pfalz/Saarland	-0.383 ± 0.110	0.059 ± 0.007	0.173 ± 0.008	-88.228 ± 3.522
Nordrhein-Westfalen	0.475 ± 0.097	0.006 ± 0.007	0.211 ± 0.007	-94.793 ± 2.525

5 Abschlussbemerkungen

Bei Seitenlängen von ca. 40 km für das Dreiecksnetz 1. Ordnung entspricht die mittlere Standardabweichung von ± 10 cm für die Restklaffungen einem Horizontalwinkelfehler von

$$m(\Delta\alpha) = \pm 206265 / 400000 = 0,5''.$$

Das korrespondiert mit der mutmaßlichen Genauigkeit der Horizontalwinkelmessung im Dreiecksnetz 1. Ordnung. Tatsächlich wiesen die verbleibenden Residuen einen zufälligen Charakter auf. Wenn eine höhere Genauigkeit gefordert ist (z. B. im Falle der Transformation der Katasterkoordinaten vom DHDN-System in das ETRS89), wird man geeignet verdichtete lokale Netze von zuverlässigen Passpunkten benötigen. Die verbleibenden Restklaffungen zusätzlicher Passpunkte sind dann zunächst im Hinblick auf ihre Ursachen sorgfältig zu analysieren. Anschließend können sie mittels einer digitalen Strinztransformation (Strinz 1925) beseitigt werden, z. B. mittels eines Kollokationsmodells (Heck 1995, S. 291).

Eine Umformung der Rotationsparameter ε_i des DHDN-Systems in auf den Fundamentalpunkt Rauenberg bezogene Parameter $\delta\phi$, $\delta\lambda$, δA ergab die in Tab. 3 aufgelisteten Werte.

Tab. 3: Rotationsparameter des DHDN-Systems

ε_i	$\bar{\varepsilon}_i$	Rauenberg
1,082''	1,197''	$\delta A = 1,96''$
0,626''	0,359''	$\delta\phi = 0,36''$
0,842''	0,842''	$\delta\lambda = 0,715''$

Die Drehung in $\delta\lambda = 0,715''$ entstand teilweise dadurch, dass bei der Umstellung von Ferro auf Greenwich anstelle des genauen Wertes von

$$\Delta\lambda = 17^\circ 39' 59,406''$$

ein abgerundeter Wert von $\Delta\lambda = 17^\circ 40'$ verwendet wurde, um die Blattgrenzen der topographischen Karten zu erhalten. Die kleinen Winkel $\delta\phi = 0,36''$ und $\delta\lambda = 0,715 - 0,594 = 0,12''$ bestätigen, wie beeindruckend genau das astronomische Team um Encke bereits um 1850 sowohl astronomische Länge als auch Breite der Berliner Sternwarte bestimmt hatten, von denen bekanntlich die Werte für Rauenberg auf trigonometrischem Wege abgeleitet wurden.

Literatur

- Heck, B.: Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. Wichmann 1995.
- Heiskanen, W. and Moritz, H.: Physical Geodesy. Freeman and Company 1967.
- Krause, D.: Bestimmung der Parameter für die Transformation des DHDN-Systems in das ETRS89-System. Unveröffentlichte Dipl. Arbeit TU Berlin, 1999.
- Strinz, H.: Koordinatenumformungen mit graphischer Ausgleichung. ZfV, 54, S. 289–300, 1925.
- Stubenvoll, R., Stahlberg, Ch. and Lelgemann, D.: On the geodetic datum and the deformation of the DHDN. Proc. 2. Turkish-German Joint Geodetic Days Berlin, p. 327–336, 1997.
- Torge, W.: Geodäsie. de Gruyter 2003.

Anschrift der Autoren

Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann
 lelge@mca.bv.tu-berlin.de
 Dipl.-Ing. Martin Noak
 martin.noak@epost.de
 Technische Universität Berlin
 Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik
 Straße des 17. Juni 135, D-10623 Berlin
 Tel.: 030-314-23205, Fax: 030-314-21973