

# Lokale Bestimmung des Geoids aus terrestrischen Gradiometermessungen unter Nutzung geostatistischer Methoden

Joachim Menz und Steffen Knospe

## Zusammenfassung

In der geophysikalischen Reichsaufnahme sind weite Gebiete Deutschlands mit der Drehwaage vermessen worden. In diesem Beitrag wird gezeigt, wie aus diesen Daten unter Benutzung der geostatistischen Integration, Differentiation und Verknüpfung schrittweise das Störpotential  $T$  und seine ersten drei partiellen Ableitungen nach der Höhe  $z$  bestimmt werden können, und zwar unter der Annahme, dass  $T$  im lokalen Bereich als eine schwachstationäre Zufallsfunktion angesehen werden kann. Dass dies möglich ist, wird an einem Testbeispiel zur lokalen Geoidbestimmung demonstriert. Neben der relativ langwierigen Geoidbestimmung aus den Krümmungsgrößen gibt es davon unabhängig einen kurzen Weg, der von den Horizontalgradienten der Schwere über  $T_z$  zu  $T$  und damit zum Quasigeoid führt. Eingegangen wird auf Probleme der relativen und absoluten Orientierung, insbesondere auf Modelldeformationen und auf die Glättungskompensation, aber auch auf die sinnvolle Anordnung von Messstellen für weitere Stützwerte und Gradienten. Die Ergebnisse der geostatistischen Vorhersage werden geologisch interpretiert. Dieser Beitrag wurde auch auf der INTERGEO 2001 in Menz/Knospe (2001) zur Diskussion gestellt.

## Summary

*The German National Geophysical Survey in the 1930th provided data from torsion balance measurements over wide areas in northern Germany and other areas. In this paper we show, how to use geostatistical integration, differentiation and transformations to determine gradually the disturbing potential  $T$  and its first three partial derivatives with respect to  $z$  on the assumption that  $T$  within the local area can be regarded as a weak-stationary random function. This is demonstrated at an example for local geoid determination. Apart from the relatively lengthy geoid determination from the curvature there is an independent short way that leads from the horizontal gradients of gravity over  $T_z$  to  $T$  and to the quasigeoid. We also deal with problems of relative and absolute orientation, model deformations and the smoothing compensation, in addition with the suitable arrangement of additional measuring points. The results of the geostatistical prediction are interpreted in geological context. This contribution was presented on the INTERGEO 2001 (Menz/Knospe 2001).*

## 1 Einführung

In der geophysikalischen Reichsaufnahme, die in den 1930er Jahren durchgeführt worden ist, sind weite Ge-

biete Deutschlands mit der Drehwaage (Graf 1967) vermessen worden. Ergebnisse dieser Messungen liegen als Karten der Horizontalgradienten der Schwere und als Karten der so genannten Krümmungsgrößen der Niveauflächen des Schwerepotentials vor. In dem folgenden Beitrag wird gezeigt, wie aus diesen Daten unter Benutzung der geostatistischen Integration, Differentiation und Verknüpfung schrittweise das Schwerepotential  $W$  (genauer das Störpotential  $T$ ) und seine ersten drei partiellen Ableitungen nach der Höhe  $z$  bestimmt werden können. Den Zugang dazu lieferte ein in Haalck (1950) vorgestelltes Konzept. Dieses Konzept wurde von uns aufgegriffen, und zwar unter der Annahme, dass  $T$  im lokalen Bereich als eine schwachstationäre Zufallsfunktion angesehen werden kann. Unter dieser Annahme ist es möglich, mit den von uns entwickelten geostatistischen Verfahren das Haalcksche Konzept zu realisieren, was an einem Testbeispiel zur lokalen Geoidbestimmung demonstriert werden soll.

## 2 Ausgangsdaten für das Testbeispiel und ihre Bereitstellung für die maschinelle Bearbeitung

Für die Bearbeitung des Testbeispiels sind die Horizontalschweregradienten und Krümmungsgrößen der Niveauflächen von ca. 1000 Drehwaage-Messstellen aus einer  $14 \times 18 \text{ km}^2$  großen Region Norddeutschlands, das Gebiet »Verden an der Aller«, benutzt worden. In Menz (2000b) werden die Karten der Horizontalschweregradienten und Krümmungsgrößen dieses Untersuchungsfeldes gezeigt. Die Daten stammen aus der Geophysikalischen Reichsaufnahme und wurden von der BEB Erdgas und Erdöl GmbH Hannover und dem Institut für Geophysik der FU Berlin zur Verfügung gestellt.

Der erste Bearbeitungsschritt besteht in der Digitalisierung der Gradienten und Krümmungsgrößen. Die aus der Digitalisierung erhaltenen Werte werden in Sätzen der Struktur

$$x, y, T_{zx}, T_{zy}, -T_{\Delta}, 2T_{xy} \quad (1)$$

zusammengefasst und als Daten-Files für die weiteren Berechnungen bereitgestellt. Dabei ist  $T_{\Delta}$  die Differenz der 2. partiellen Ableitungen in  $y$  und  $x$

$$T_{\Delta} = T_{yy} - T_{xx} \quad (2)$$

Die Koordinaten  $x, y, z$  beziehen sich auf ein verebnetes rechtwinkliges geodätisches Koordinatensystem, in dem  $x$  nach Nord und  $y$  nach Ost zeigen. In Bezug auf die  $x$ - $y$ -Ebene dieses Koordinatensystems sollen die zu bestimmenden Höhenanomalien  $\zeta$  hier als Höhenlinien des Quasigeoids dargestellt werden. In Wirklichkeit geben sie den Abstand vom Niveauellipsoid, der gekrümmten Bezugsfläche, an. Der Übergang vom natürlichen (lotrichtungsgebundenen) Koordinatensystem, in dem mit der Drehwaage gemessen wird, zum o. g.  $x, y, z$  Auswertesystem ist zulässig, weil die Messwerte 2. Ableitungen von  $W$  sind, und 2. Ableitungen sind invariant gegen Verschiebungen und Neigungen des Koordinatensystems. Wegen dieser Invarianz werden für die absolute Orientierung der aus Drehwaagemessungen ermittelten lokalen Schwankungen des Quasigeoids in größeren Abständen Stützwerte gebraucht.

### 3 Geostatistische Modellannahmen

Die aus der Digitalisierung hervorgegangenen Daten (1) sind bei dem vorliegenden Abstand der Messstellen von ca. 400 m autokorreliert. Die Autokorrelation resultiert aus der Dichteverteilung im Untergrund und damit aus den Gravitationseinflüssen gemeinsamer Quellen. Dieser so genannte unregelmäßig-systematische Einfluss wirkt mit rein zufälligen Störgrößen und regionalen Trends zusammen, was für eine Auswertung der Messungen unter stochastisch-deterministischen Modellannahmen spricht. In unserer Arbeit wird deshalb angenommen, dass das Schwerepotential  $W(x,y)$  als ein schwach stationäres Zufallsfeld  $S(x,y)$  angesehen werden kann, dem zufällige Störgrößen  $R$  und systematische Trends  $m(x,y)$  überlagert sein können

$$W(x,y) = S(x,y) + m(x,y) + R. \tag{3}$$

Das ist das Modell, das sowohl in der Ausgleichsrechnung bei der Kollokation (Moritz 1989) als auch in der Geostatistik beim Universal Kriging (UK) benutzt wird. Beide Verfahren liefern äquivalente Ergebnisse, wie in Menz/Pilz (1994) gezeigt worden ist, obwohl die Ableitung der Verfahren unterschiedlich ist. Die Bewertung der nun folgenden Betrachtungen können deshalb sowohl aus der Sicht der Geostatistik als auch aus der Sicht der Ausgleichsrechnung vorgenommen werden, für die mit der Bayesschen Kollokation in Menz/Pilz (1997) ein recht allgemeiner Rahmen definiert wird, der es gestattet, Co-Variablen und Gradienten einerseits sowie a priori Kenntnisse über die Parameter der Trendfunktion andererseits zu integrieren (Menz 1998, Menz 1999). Im Prinzip wird der Messwertvektor dabei durch die beobachteten Co-Variablen erweitert. Besonders günstig für die Vorhersage ist es, wenn diese funktional von dem zu untersuchenden Merkmal abhängen, wie das zum Beispiel

bei gemessenen Gradienten und Krümmungen der Fall ist. Die globalen Kugelfunktionsmodelle könnten dabei z. B. als a priori Kenntnisse des Trends herangezogen werden.

### 4 Haalcksches Konzept zur Auswertung von Drehwaagemessungen

Durch Drehwaagemessungen werden die Horizontalgradienten der Schwere  $W_{ZX}, W_{ZY}$  und die Krümmungsgrößen  $W_{\Delta} = W_{YY} - W_{XX}, 2W_{XY}$  des Schwerepotentials  $W$  bestimmt. In Haalck (1950) wird ein Konzept vorgelegt, das angibt, wie aus diesen Messgrößen ein vollständiges Bild über die lokalen Schwankungen des Schwerefeldes abgeleitet werden kann. In Abb. 1 wird das Haalcksche Konzept in Form eines Ablaufschemas vorgestellt, dass durch Integration, Differentiation und Verknüpfung zu den gesuchten Größen des Störpotentials  $T, T_Z, T_{ZZ}$  und  $T_{ZZZ}$  führt.

Zur Ableitung des Konzeptes wird der Störpotentialunterschied zwischen zwei benachbarten Punkten  $P(x,y)$  und  $P(x_0,y_0)$  der Bezugsebene durch eine Taylor-Entwicklung angeben:

$$T = T|_0 + T_x|_0 (x-x_0) + T_y|_0 (y-y_0) + \dots \tag{4}$$

Dabei können beim vorliegenden Messpunkt Abstand die Glieder höherer Ordnung in (4) und in den aus (4) gebildeten ersten und zweiten partiellen Ableitungen vernachlässigt werden:

$$T_x = T_x|_0 + T_{xx}|_0 (x-x_0) + T_{xy}|_0 (y-y_0) + \dots \tag{5}$$

:

$$T_{zz} = T_{zz}|_0 + T_{zzz}|_0 (x-x_0) + T_{yzz}|_0 (y-y_0) + \dots \tag{6}$$

Die Formeln (4) bis (6) gestatten es, auf dem Wege der numerischen Integration über die auf der rechten Seite angegebenen Größen die auf der linken Seite stehenden zu berechnen. Für diese numerische Integration, die nun im Unterschied zu Haalck unter geostatistischen Modellannahmen durchgeführt werden soll, wird das in Menz (1991) vorgestellte so genannte Gradienten-Kriging eingesetzt, bei dem das Ergebnis der Integration, wie gefordert, wegunabhängig ist. Stehen Stützwerte zur Verfügung, dann ist damit auch die Einordnung der lokalen Schwankungen in regionale Bezugssysteme möglich.

In Haalck (1950) wird davon ausgegangen, dass die Normalfeldkorrekturen (Militzer/Weber 1984, Torge 2001) bereits in den Messwerten berücksichtigt worden sind, so dass die reduzierten Größen dem Störpotential  $T$  entsprechen und die Laplacesche Differentialgleichung

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0 \tag{7}$$

erfüllen. Die partiellen Ableitungen von (7) ergeben:

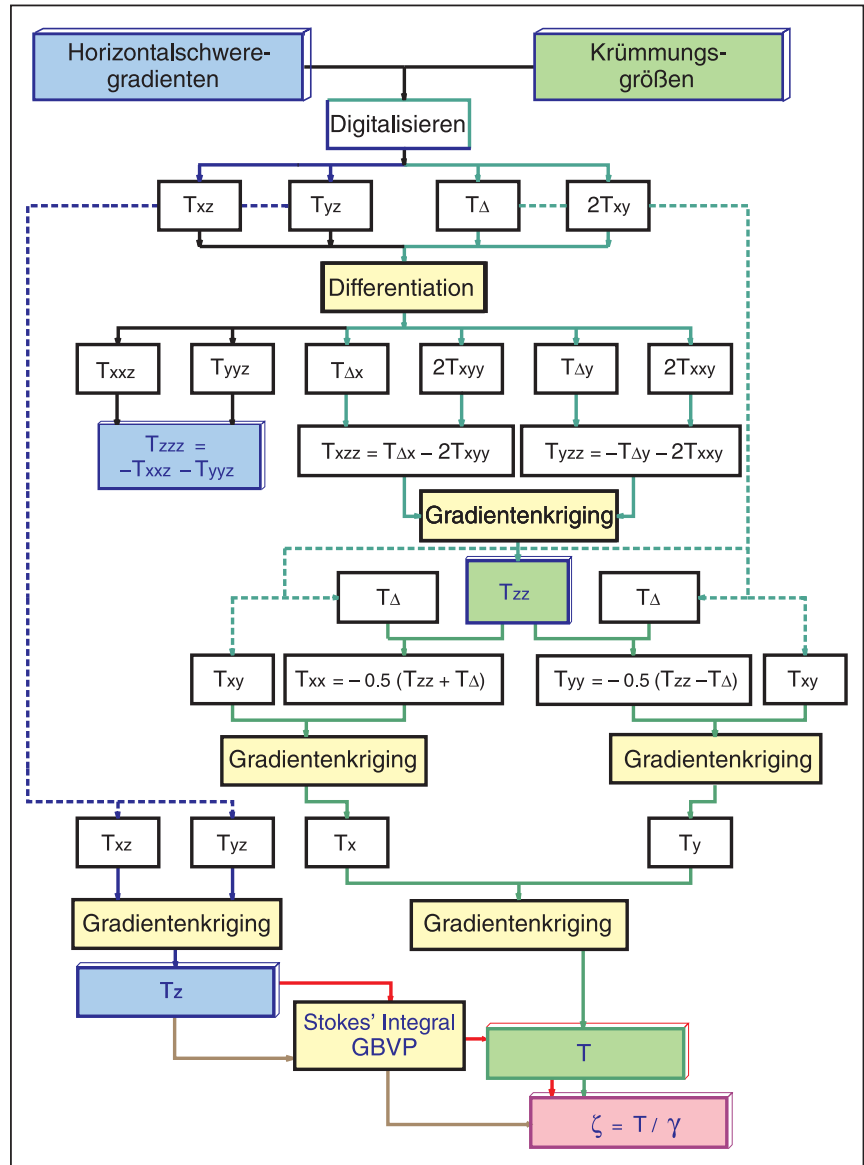


Abb. 1: Modifiziertes Haalcksches Konzept als Ablaufschema

$$T_{xzz} = -T_{xxx} - T_{yyx}, \tag{8}$$

$$T_{yzz} = -T_{xxy} - T_{yyy}, \tag{9}$$

$$T_{zzz} = -T_{xxz} - T_{yyz}. \tag{10}$$

Mit den partiellen Ableitungen der Krümmungsgrößen  $-T_{\Delta}$  und  $2T_{XY}$

$$-T_{\Delta x} = T_{xxx} - T_{xyy} ; 2T_{xxy}, \tag{11}$$

$$-T_{\Delta y} = T_{xxy} - T_{yyy} ; 2T_{xyy} \tag{12}$$

lassen sich die Beziehungen (8) und (9) in

$$T_{xzz} = T_{\Delta x} - 2T_{xxy} \tag{13}$$

$$T_{yzz} = -T_{\Delta y} - 2T_{xyy} \tag{14}$$

umformen. Addiert man zu (7) auf beiden Seiten  $T_{xx}$  bzw.  $T_{yy}$ , dann erhält man schließlich

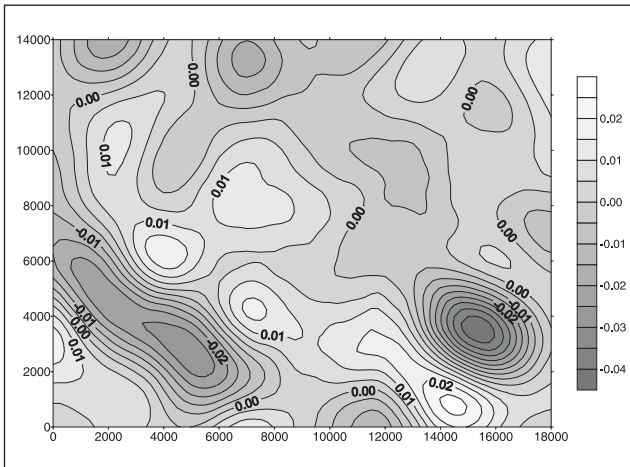
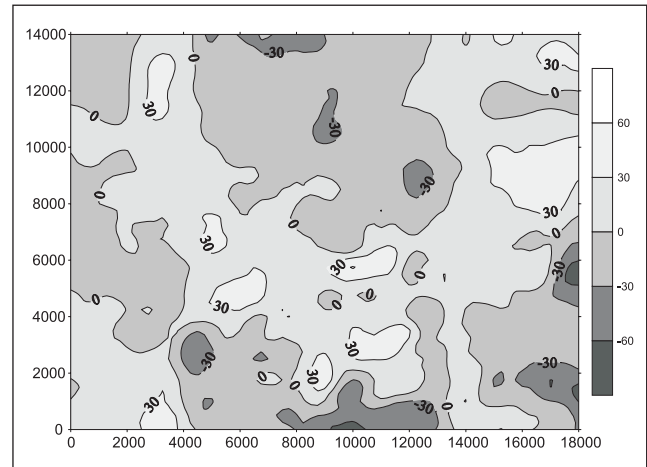
$$T_{xx} = -\frac{1}{2}(T_{zz} + T_{\Delta}) \tag{15}$$

$$T_{yy} = -\frac{1}{2}(T_{zz} - T_{\Delta}). \tag{16}$$

Damit sind alle Formeln zur Berechnung von T und seiner ersten bis dritten partiellen Ableitungen zusammengestellt worden. Sie entsprechen dem in Haalck (1950) angegebenen Konzept zur Auswertung der Drehwaagemessungen, das hier nach dem Ablaufschema in Abb. 1 abgearbeitet wird. Die Höhenanomalien  $\zeta$  werden schließlich nach dem erweiterten Theorem von Bruns berechnet. Im Normalpotential U werden die Punkte P der Erde durch die Modellpunkte Q mit  $U_Q = T_P$ ,  $\phi_Q = \phi_P$ ,  $\lambda_Q = \lambda_P$  dargestellt. Nach dem Theorem von Bruns ergibt sich der Abstand zwischen P und Q mit der Normalschwere  $\gamma$  in Q aus

$$\zeta = -\frac{U_P - U_Q}{\gamma} = \frac{T}{\gamma} \tag{17}$$



Abb. 3:  $T_{zzz}$  in  $\text{Em}^{-1}$  aus HorizontalgradientenAbb. 4:  $T_{zz}$  in E aus Krümmungsgrößen

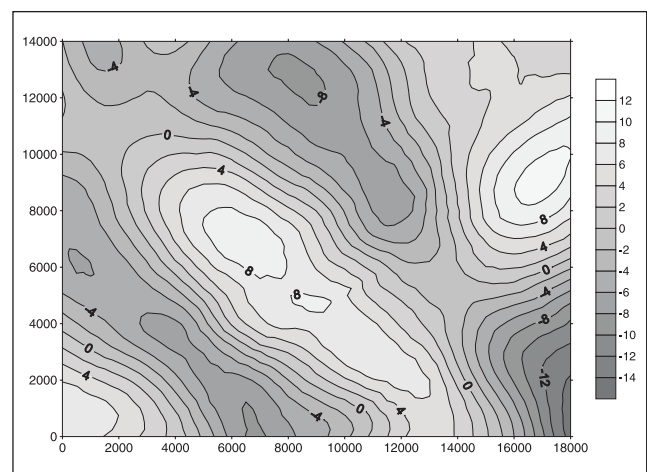
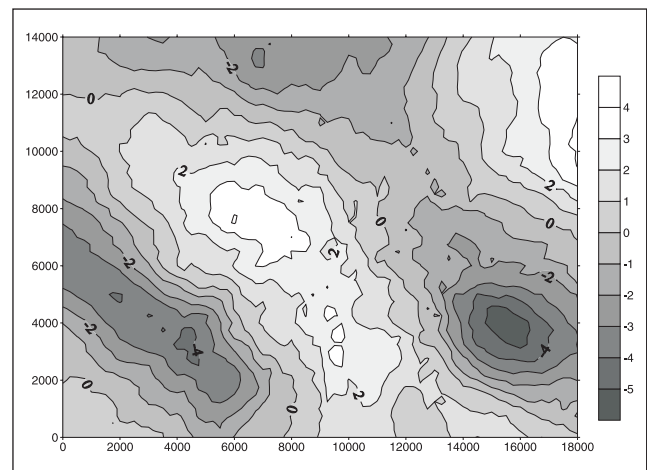
### 5.4 Geostatistische Integrationen

Zur Vorbereitung des dritten Bearbeitungsschrittes werden auf der Basis der Daten aus den Verknüpfungen (13) und (14) die Parameter der Kovarianzfunktion, die für die geostatistische Integration durch Gradienten-Kriging gebraucht werden, erneut geschätzt und mit den umgerechneten Parametern aus den benachbarten Reihen in Abb. 1 verglichen. Sie können dabei weiter präzisiert werden. Diese interaktive Arbeitsweise, die auch in den weiteren Bearbeitungsschritten praktiziert worden ist, lässt fehlerhafte Modellannahmen besser erkennen als eine geschlossene Lösung.

Zur Vorhersage der gesuchten Größe  $T_{zz}$  in Reihe 8 der Abb. 1 wird das von uns entwickelte und untersuchte Gradienten-Kriging (Menz 1991, 1994b, 1998, Röttig 1997) benutzt. Das Ergebnis der Vorhersage von  $T_{zz}$  zeigt Abb. 4.

In der weiteren Bearbeitung wird  $T_{zz}$  mit  $T_{\Delta}$  nach (15) und (16) verknüpft (Reihe 9, Abb. 1). Aus den so erhaltenen Größen  $T_{xx}$  und  $T_{yy}$  lässt sich mit den störgrößenfreien Daten  $T_{xy}$  über erneut präzisierte Modellparameter durch Gradienten-Kriging  $T_x$  und  $T_y$  ableiten (Reihe 11, Abb. 1).

Im letzten Bearbeitungsschritt führt schließlich die geostatistische Integration mit erneut präzisierten Modellparametern zum gesuchten Störpotential  $T$ , aus dem nach (17) die Höhenanomalie  $\zeta$  abgeleitet werden kann. In Abb. 5 wird die aus den Krümmungsgrößen in der eben dargestellten Art und Weise bestimmte Höhenanomalie für das Testgebiet gezeigt.

Abb. 5: Höhenanomalie  $\zeta$  in mm aus KrümmungsgrößenAbb. 6:  $T_z$  in mGal aus Horizontalgradienten

### 5.5 Unabhängige Geoidbestimmung über die Horizontalgradienten der Schwere

Nach dem Ablaufschema in Abb. 1 links führt Gradienten-Kriging der Horizontalgradienten der Schwere zu der vierten gesuchten Größe  $T_z$ , die in Abb. 6 zu sehen ist. Von Bian sind Verfahren weiterentwickelt worden, die es

gestatten, die lokalen Geoidundulationen aus  $T_z$  auf zwei unterschiedlichen Wegen zu bestimmen (Menz/Bian 1997a, b).

Der eine Weg ist die planare Lösung des Stokeschen Randwertproblems im Raumbereich. Unter Benutzung dieser Lösung erhält man aus  $T_z$  nach Abb. 6 für  $\zeta$  die in Abb. 7 angegebene Darstellung. Der zweite Weg benutzt die Spektralzerlegung des Schwerepotentials  $T$ . Im Unterschied zur diskreten Fourier-Transformation basiert das





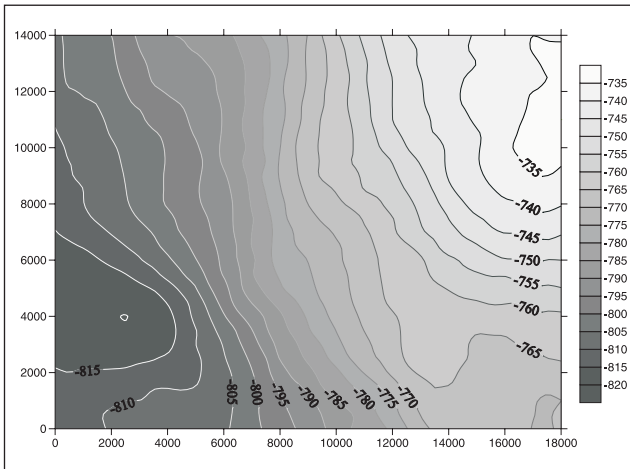


Abb. 8:  $\zeta$  in mm, auf der Basis von GPS-levelling-Stützwerten orientiert

Für die Abnahme der Nachbarschaftsbeeinflussung (Autokorrelation) des Störpotentials  $T$  bzw. der Höhenanomalie  $\zeta$  auf 37% (entspricht  $\exp(-1)$ ) wurde eine Reichweite von ca. 5 km festgestellt. Schließlich sei darauf hingewiesen, dass am Anfang die Drehwaagemessungen (1) über Ordinary-Kriging mit einem Signal zu Rauschen-Verhältnis von 2,1; 1,1; 0,8; 1,0 (Hillmann 1997) geglättet worden sind, um mit störgrößenfreien Werten (1a) bzw. (1b) die weitere Auswertung durchführen zu können. Zur Konditionsverbesserung der Kovarianzmatrizen für das Gradienten-Kriging mussten die Hauptdiagonalelemente für Gradienten um ca. 5% erhöht werden, eine Regularisierung, die wie die Filterung einer Störgröße interpretiert werden kann. Bezüglich weiterer Informationen zur Ableitung der Modellparameter sei auf die Dissertationen Hillmann (1997) und Knospe (2001) verwiesen.

Unter Benutzung der über GPS-levelling bestimmten Stützwerte, deren Störgrößenanteil an der Gesamtvarianz auf ca. 50% eingeschätzt worden ist, erhält man für das Testbeispiel den in Abb. 8 angegebenen Verlauf der Höhenanomalien.

## 8 Vergleiche, Besonderheiten und Bewertung der Verfahrensweise

### 8.1 Vergleichbare Arbeiten

Im Unterschied zu unserer Arbeit folgen die meisten uns aus der Literatur bekannten Arbeiten zur Ableitung des Geoids aus Drehwaagemessungen (Seleny 1953, Mueller 1960, Heineke 1978, Völgyesi 1998) dem in Eötvös (1906) vorgelegten Konzept. Danach werden die Drehwaagemessstellen zu einem Dreiecksnetz vermascht, auf dessen Grundlage eine im Allgemeinen zweistufige Netzausgleichung gelöst wird. In der ersten Stufe werden aus den reduzierten und eventuell geglätteten Krümmungsgrößen  $T_{XY}$ ,  $T_{\Delta}$ , für die im Allgemeinen ein lineares Ver-

halten zwischen den benachbarten Messstellen  $i$ ,  $k$  vorausgesetzt wird, ihre Lotabweichungsdifferenzen  $\Delta\xi_{ik}$ ,  $\Delta\eta_{ik}$  ermittelt. In der zweiten Stufe werden dann die Geoidundulationen unter der gleichen Voraussetzung nach dem Prinzip des astronomischen Nivellements bestimmt. Dabei wird nun das gradiometrisch verdichtete Lotabweichungsnetz benutzt. Bezüglich näherer Einzelheiten sei auf Heineke (1978) verwiesen, in der darüber hinaus weitere Lösungsverfahren untersucht worden sind.

In Hein (1981) wird gezeigt, dass die Kollokation die geeignete Methode zur Auswertung von Drehwaagemessungen ist, vor allem dann, wenn zur Auswertung auch Gravimeter- und Lotabweichungsmessungen mit herangezogen werden sollen. Nach Menz/Pilz (1994, 1997) entspricht die Kollokation der Ausgleichsrechnung dem erweiterten universellen Kriging (Menz 1996) in der Geostatistik, so dass sich die Arbeiten von Hein mit den von uns durchgeführten Arbeiten vergleichen lassen. Als lokales ebenes Kovarianzmodell für  $T$  wählte Hein das in Reilly (1979) unter Benutzung der Besselfunktion aufgestellte. Für die Vorhersage der Absolutwerte benutzte er dagegen globale Kugelfunktionsmodelle der Schwereanomalien nach Tscherning/Rapp (1974) und nach Moritz (1977). Bei der von Arabelos/Tscherning (1987) durchgeführten Kollokation mit Drehwaagemessungen aus einem Testgebiet in Südohio wird ebenfalls von einem Kugelfunktionsmodell der Kovarianzfunktion ausgegangen (Goad et al. 1984, Krarup/Tscherning 1984), bei dem die langwelligen Anteile bis zu Grad und Ordnung 180 (Wenzel 1985) dem Trend zugeordnet und eliminiert worden sind. Interessant ist in diesem Zusammenhang die Feststellung, dass eine Variation in Grad und Ordnung nur einen geringfügigen Einfluss auf die Ergebnisse hat. Nicht untersucht wurde bisher, ob sich die Vorhersagen verbessern, wenn die langwelligen Anteile im Frequenzspektrum sinnvollerweise durch ihre Fehlerkovarianzen berücksichtigt werden (Lehmann 2000). Interessant sind schließlich die in jüngster Zeit von Tóth et al. (2001) in zwei Testregionen Ungarns durchgeführten Geoidbestimmungen aus Drehwaagemessungen, in denen Vergleiche zwischen den GBVP- und den Kollokationslösungen angestellt worden sind. In Goltz (2001) werden in einem Testgebiet in Norddeutschland Vergleiche zwischen aus Drehwaagemessungen berechneten und gemessenen Schwerewerten angestellt. Es werden rasterbasierte Auswertemethoden angewendet: die Methode von Haalck, eine Berechnung mit Übertragungsfunktionen (basierend auf einer Spektralzerlegung und Fast-Fourier-Transformation, FFT) sowie ein Ansatz der Ausgleichsrechnung mit vermittelnden Beobachtungen. Für die vorangestellte Interpolation auf ein fingiertes Messpunktraster (vgl. (1b)) wird wie in unserer Arbeit ein geostatistischer Ansatz mit Störgrößenfilterung empfohlen. Allerdings wird später gezeigt, dass der Übergang auf dieses regelmäßige Raster keine Genauigkeitssteigerung gegenüber einer Auswertung basierend auf dem unregel-

mäßigen Messpunktnetz (vgl. (1a)) bringt, wobei die Auswertung über Ausgleichung in Triangulationsnetzen und durch Kollokation vorgenommen wird. Der eingesetzte Kollokationsansatz liefert dabei im Mittel und in den Extrema etwas stärkere Abweichungen, wurde aber dennoch wegen der integrierten Störgrößenfilterung als flexibelste Methode zur Auswertung von Drehwaagemessungen empfohlen.

## 8.2 Besonderheiten und Bewertung

Im Unterschied zu unserer mehrstufigen geostatistischen Lösung nach dem Ablaufschema in Abb. 1 führt die in Hein (1981) vorgestellte Kollokation jeweils in einem einzigen Rechengang zur globalen, zur regionalen und zur lokalen Komponente des an den Punkten eines Grids zu präzisierenden Signalvektors

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^I \\ \sigma^{II} \\ \sigma^{III} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma^I \\ \sigma^{II} \\ \sigma^{III} \end{bmatrix} \quad (23)$$

mit der Geoidundulation  $N$ , den Lotabweichungskomponenten  $\xi$  und  $\eta$  und der Schwereänderung  $\Delta g$ . Aus der Addition der in drei Schritten abgeleiteten Komponenten ergibt sich die Gesamtwirkung. Um die Matrizen der zu lösenden Gleichungssysteme in Grenzen zu halten, werden, wie hier beim lokalen Kriging, von Hein ebenfalls nur die Messwerte aus einem Einwirkungsbereich (EWB) zur Vorhersage herangezogen (lokale Kollokation). Der Radius des EWB richtet sich dabei nach dem ersten Nulldurchgang der Kovarianzfunktion, die der entsprechenden Messwertklasse zugeordnet ist. Die Nulldurchgänge zeigt z. B. Abb. 9.

Die Kollokation berücksichtigt alle Datenklassen und die Laplacesche Differentialgleichung (LDGL) über das Kugelfunktionsmodell der Kovarianzfunktion in einer geschlossenen Lösung. Dagegen ist die von uns gewählte geostatistische Lösung nach dem Ablaufschema in Abb. 1 ein transparentes interaktives mehrstufiges Verfahren, bei dem man auf zwei voneinander unabhängigen Wegen das Schwerepotential bestimmen kann, und zwar auf kürzerem Weg aus den Horizontalgradienten der Schwere und auf längerem Weg aus den Krümmungsgrößen. Die letztere Methode kann als eine Alternative zur astrogradiometrischen Ausgleichung nach Eötvös (1906) und Heineke (1978) angesehen werden.

Die LDGL (7) wird von uns über (10) bei der Ableitung von  $T_{ZZZ}$ , über (8), (9) und (10) bei der Ableitung von  $T_{ZZ}$  und damit über (15), (16), (5) und (4) bei der Ableitung von  $T$  berücksichtigt. Zur Ableitung von  $T_z$  wird sie nicht gebraucht. Sie findet aber wieder Berücksichtigung, wenn anschließend  $T$  aus  $T_z$  bestimmt wird.

Unter dem Aspekt, dass die LDGL schon auf diese Weise in den Auswertalgorithmus eingeht, ist das Kugelfunktionsmodell der Kovarianzfunktion nicht erforderlich. In unseren Untersuchungen wird für die Kovarianzfunktion des Störpotentials  $T$  einfach ein isotropes

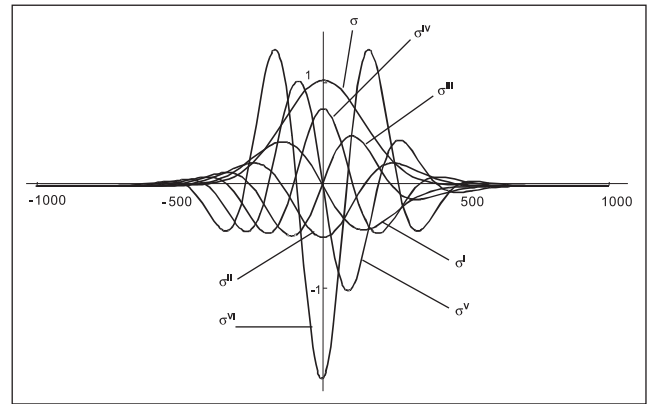


Abb. 9: Eindimensionale Gaußsche Kovarianzfunktion  $\sigma(x)$  von  $T$  und ihre ersten sechs Ableitungen nach  $x$ . Die Werte auf der Ordinatenachse verändern sich mit jeder Ableitung um den Faktor  $10^{-2}$

Gaußsches Modell angenommen, entsprechend differenziert und an die empirisch ermittelten Auto- und Kreuzkovarianzen der Messwerte angepasst. Alternativ dazu wurden die Modellparameter nach dem Prinzip der Rückwärtssteuerung (Menz 2000a, Menz/Kolesnikov 2002) bestimmt. Dabei besteht die Chance, diese Bestimmung auf jeder Bearbeitungsstufe erneut vorzunehmen, was zu einer allmählichen Stabilisierung der Modellparameter führt. Analog wurde auch  $T_z$  behandelt. Die Ableitungen der Gaußschen Kovarianzfunktion zeigen schwingende Verläufe (Abb. 9), wie sie für bandbegrenzte Merkmale typisch sind. Sie können im Anfangsbereich wieder durch Gaußsche Modelle approximiert und deren Parameter anschließend umgerechnet werden. Diese Möglichkeit wurde in Hillmann (1997) bei der Modellparameterbestimmung durch Rückwärtssteuerung genutzt.

Bei der Anpassung der Modelle an die empirischen Kovarianzfunktionen hat der Bearbeiter stets einen gewissen Spielraum. Er kann selbst unter Benutzung der Cross-Validation nicht erkennen, dass die theoretisch begründeten Kovarianzfunktions-Modelle für die Genauigkeit der Vorhersage besser sein sollen. Oft liefern einfachere Modelle mit richtig angepassten Parametern genauere Interpolationen. Denn die zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeiten, hier die LDGL (7), finden in der Ausbildung der Realisierung der Merkmale und damit in den Messwerten, wenn sie wie hier in ausreichender Dichte vorliegen, ihre gebührende Berücksichtigung. Von diesem Gesichtspunkt ausgehend, sind in unserer Arbeit nur einfache Gaußsche Kovarianzfunktions-Modelle benutzt worden.

Wenn die Messungen außerhalb des Untersuchungsgebietes nicht berücksichtigt werden, entstehen bei der geostatistischen Bearbeitung nur Fehler am Modellrand, jedoch keine so genannten Restfehler, wie bei der Lösung des geodetic boundary value problems (GBVP), bei dem die Integration über die geschlossene Randfläche durchzuführen ist. In Tóth et al. (2001) wird deshalb gezeigt, wie beim GBVP der Restfehler des bei der Integration nicht erfassten Gebiets abgeschätzt und korrigiert werden kann.



In der Abb. 9 wird der Verlauf einer Gaußschen Kovarianzfunktion  $\sigma(x)$  mit ihren ersten sechs Ableitungen nach  $x$  in einem Vertikalschnitt gezeigt. Die Varianz  $\sigma(0)$  wurde dabei Eins gewählt. Die Werte auf der Ordinatenachse ändern sich mit jeder Ableitung um den Faktor  $10^{-2}$ . Durch die ersten sechs partiellen Ableitungen der Kovarianzfunktion des Störpotentials  $T$  lassen sich alle Auto- und Kreuz-Kovarianzfunktionen für die partiellen Ableitungen des Störpotentials bis zur 3. Ordnung bilden. Auf die Vorzeichenregeln ist bei der Aufstellung der Kriging-Gleichungssysteme sorgfältig zu achten.

Wenn die Messwerte aus unterschiedlichen Datenklassen stammen, die wie im vorliegenden Fall funktional zusammenhängen, dann sind die unbekanntes Modellparameter für alle Datenklassen gleich, was bei ihrer Bestimmung zu beachten ist. Ein neues Verfahren zur Ableitung der Modellparameter für derartige Fälle wird in Menz/Kolesnikov (2002) zur Diskussion gestellt.

Die Beschränkung der Modellanpassung auf einen begrenzten Einwirkungsbereich EWB passt zum lokalen Kriging, bei dem der Trend flexibel über den Mittelwert im EWB erfasst wird, der wie ein gleitendes Fenster bei der Vorhersage von Gitterpunkt zu Gitterpunkt geführt wird. Wenn Stützwerte und Gradienten bzw. Co-Variable gleichzeitig verarbeitet werden, muss bei der Wahl der Größe des EWB auch auf das »Prinzip der vollständigen Erfassung« geachtet werden (Menz 1994c, 1995). Stehen nur Gradienten und keine Stützwerte zur Verfügung, ist eine Simple-Kriging-Lösung mit dem Erwartungswert Null zu empfehlen. Noch günstiger ist, wenn die Erwartungswerte für das lokale Simple Kriging einem regionalen Trendmodell entnommen werden können, weil auf diese Art und Weise den Modelldeformationen gegengesteuert werden kann.

Mit Modelldeformationen muss man z.B. rechnen, wenn mehrere geostatistische Integrationen, d.h. mehrfache Vorhersagen durch Gradienten-Kriging, wie im Ablaufschema von Abb. 1, aufeinander folgen. Ein Fehler in der Integrationskonstante bewirkt bei der sich anschließenden Integration eine lineare, danach eine quadratische, dann eine kubische u.s.w. Deformation, die erst über Absolutwerte erkannt und beseitigt werden kann. Hinzu kommen Glättungseffekte, wenn die Störgrößenvarianz der Gradienten oder das Linienelement für die numerische Ableitung der Kovarianzfunktion zu groß gewählt worden sind. Sie können über eine Maßstabsänderung der Kriginggewichte kompensiert werden, für deren Bestimmung ein minimaler und ein maximaler Stützwert günstig wäre. An dieser Stelle sei auch auf die Verfahren zur Glättungskompensation nach Olea/Pawlowsky (1996) verwiesen. In Knospe (2000, 2001) wird gezeigt, wie aus dem geologischen Modell des Untergrundes Aussagen über die zu erwartende Spannweite des Störpotentials  $T$  und seiner partiellen Ableitungen gemacht werden können. Diese Angaben können auch für die richtige Auswahl des Flächenelements zur Durchführung der numerischen Differentiation genutzt werden, die ja

nach dem Ablaufschema in Abb. 1 mehrfach durchzuführen ist.

Eine besonders diffizile Angelegenheit ist die Auswahl der Störgrößenvarianz der Absolutwerte (Lehmann 2000), die letztendlich gebraucht werden, um die relativen Undulationen an regionale und globale Modelle anzuschließen.

### 8.3 Verifizierung mit Gravimetrischer Modellierung

Die gravimetrische Vorwärtsmodellierung bietet eine Möglichkeit zur Bestimmung der Spannweite der zu erwartenden Schwere- und Höhenanomalien. Weiterhin ergibt sich hiermit auch die Möglichkeit, ein Maß für die Störgrößenvarianz zu finden, wenn es gelingt, Unsicherheiten im geologischen und im Dichte-Modell zu bewerten. Dieser Ansatz zur Schätzung der Parameter der Autokovarianzfunktion ist von den oben beschriebenen Datenauswertungen unabhängig.

Eine Beschreibung des geologischen Untergrundes des Testgebietes findet sich in Knospe (2000) und soll hier zur Beschreibung des Dichtemodells in kurzer Form wiedergegeben werden. Das hier aufgestellte geologische Modell gründet sich auf Jaritz (1972, 1973) und Baldschuhn et al. (1996).

Das beschriebene Drehwaagemessgebiet liegt zwischen Bremen und Hannover am Südrand der Pompeckjschen Scholle der Norddeutschen Tiefebene im Übergang zum Niedersächsischen Becken und zwar bei »Verden an der Aller«. Die Anlage des Norddeutschen Beckens erfolgte als transtensives pull-apart-Becken (Betz et al. 1987) im Oberrotliegenden (wegen der starken Aufheizung durch den intensiven Unterrotliegendenvulkanismus erfolgte die Absenkung erst im Oberrotliegenden), was zu Subsidenz in Perm und Trias führte. Durch Halokinese wird ebenfalls bis in die Oberkreide Subsidenz induziert. In Knospe (2000) konnte gezeigt werden, dass zur Aufstellung eines gravimetrischen Modells nur der geologische Komplex im Hangenden der tektonisch strukturierten Zechsteinbasis relevant für die lokale Betrachtung des Schwerefeldes im Untersuchungsgebiet ist. Der Bereich der Lithosphäre bis zur Verebnungsfläche des Grundgebirges verursacht einen überregionalen Anteil im Störpotential, aber keine Undulation im Untersuchungsgebiet.

Im geologischen Komplex vom Zechstein bis zum Quartär sind Dichtekontraste durch Umlagerungen an tektonischen Elementen und halokinetischen Strukturen zu erwarten, wodurch unterschiedliche Gesteine verschiedener Dichte in horizontale Nachbarschaft geraten. Wesentliches Charakteristikum sind die vier Salzstöcke, dargestellt als Grundrisskizze in Abb. 10, die in Nordwest-Südost-Richtung gestreckt und über Salzkissen teilweise miteinander verbunden sind. Die mit der Halokinese vorwiegend in der Oberkreide entstehenden Inversionsstrukturen und die den Salzstöcken vorgelagerten Randtröge, deren Sedimentmächtigkeiten deutlich erhöht

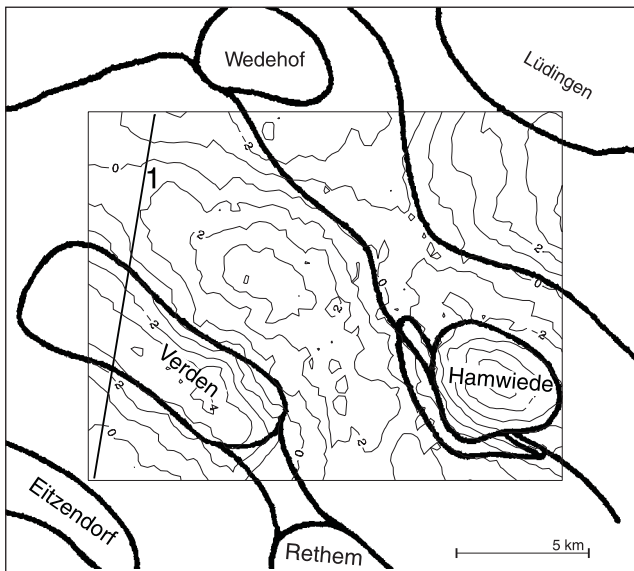


Abb. 10: Geologische Skizze der Salinarstrukturen. Lage des geologischen Profils, berechnete Schwereanomalien in mGal aus Abb. 6

sind, generieren einen sehr heterogenen geologischen Komplex mit kompliziert zu modellierendem Dichtemodell. Detaillierte Untersuchungen über zu erwartende Dichteunterschiede sind von Hermes (1986) gemacht worden und bilden die Grundlage für die durchgeführten gravimetrischen Modellierungen.

Aus den Arbeiten von Haalck (z. B. 1929) ist bekannt, dass sich in halokinetisch beeinflussten Gebieten messbare Störpotentiale ergeben. Die auch auf Grund dieser Arbeiten verstärkt in den 1930er bis in die 1960er Jahre durchgeführten Drehwaagemessungen sind auch im norddeutschen Flachland zur Suche und Vermessung der dort vorhandenen Salzstöcke eingesetzt worden. Eine qualitative Bestätigung des Zusammenhanges zeigt sich in der Gegenüberstellung der geologischen Skizze und der Ergebnisse der Auswertungen der Drehwaagemessungen. Die gravimetrischen Modellierungen liefern ein Maß für die Spannweite der zu erwartenden Schwereanomalien. Die Ergebnisse der gravimetrischen Vorwärts-Modellierung mit dem Programm GramPro (Knospe 2000) in geologischen Profilen sind in Abb. 11 dargestellt. Das hier dargestellte Profil 1 verläuft annähernd senkrecht zur Längsachse der Salzstrukturen (Abb. 10). Unter der Annahme mittlerer plausibler Dichtewerte erzeugt der Salzstock »Verden« eine Schwereanomalie von maximal 6 mGal.

Die mit den geostatistischen Verfahren aus den Gradiometermessungen abgeleitete Schwereanomalie ist in Form und Lage fast identisch, die Amplitude ist mit ca. 4 mGal aber kleiner. Diese Differenz ist ein Maß für die den Gradiometermessungen aufgezwungene Glättung, wobei die Abweichungen von der in GramPro angenommenen unendlichen Fortsetzung der Strukturen in der dritten Dimension einerseits und die Unsicherheit bezüglich der wahren Dichteverteilung andererseits der Interpretation Spielraum lassen.

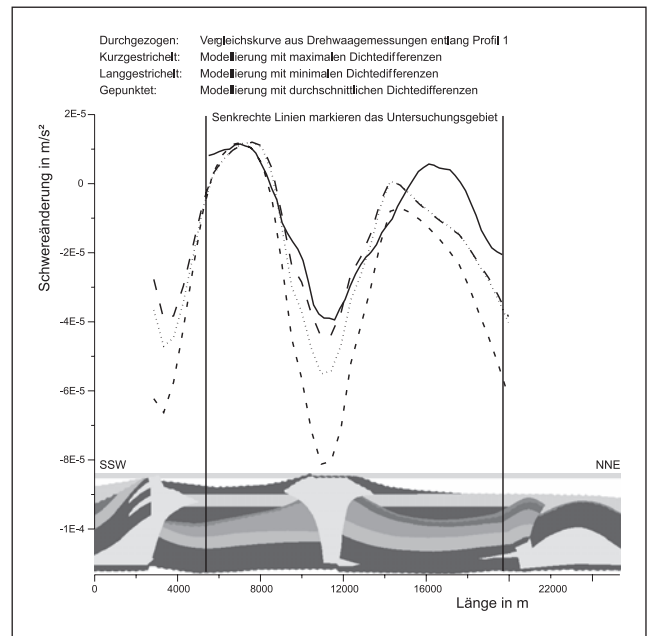


Abb. 11: 2D Schweremodellierung des geologischen Profils 1 (siehe Abb. 10)

In der Modellierung wurde mit verschiedenen Dichtewerten in einem plausiblen Rahmen gearbeitet, der die in der Natur vorhandene Variationsbreite der Dichte darstellt und damit ein Maß für die Unsicherheit (Störgrößenanteil Mikrovariabilität) der gravimetrischen Messungen und daraus abgeleiteten Größen ist. Die in diesem Fallbeispiel ermittelte Variationsbreite von ca. 3 mGal, siehe Abb. 11, ist im Verhältnis zu den berechneten Amplituden unerwartet hoch.

Um die Unsicherheit bezüglich der Geometrie einzuschränken, wurden Störkörperkonstellationen modelliert (Knospe 2000). Die modellierte Schwereanomalie beträgt 7 bis 10 mGal, ist also größer, als in der Auswertung der Gradiometerdaten und auch größer als in der Modellierung des geologischen Profils. Dies kann bestätigen, dass es sich bei der Differenz tatsächlich um den Glättungseffekt handelt.

Letztendlich muss konstatiert werden, dass durch die Unkenntnis der genauen Dichteverteilung im geologischen Modell und die unbestimmte Geometrie desselben eine Ableitung der gesuchten Parameter für die Variationsbreite der Schwereanomalien und für die zu erwartende Störgrößenvarianz nur mit großer Unsicherheit gelang.

## 9 Schlussbetrachtungen

Neben den Stützwerten des zu beschreibenden Merkmals werden häufig auch Zusatzdaten (Co-Variablen) gewonnen, die ebenfalls Informationen über das zu untersuchende Merkmal enthalten und zwar insbesondere dann, wenn es sich um funktional abhängige Daten wie beispielsweise Ableitungen handelt. Für die geostatistische

Vorhersage auf der Basis derartiger Messwertklassen sind im Rahmen unserer Forschung Verfahren entwickelt worden, deren Eignungsnachweis bei der Auswertung der Drehwaagemessungen nach einem von Haalck (1950) vorgeschlagenen Konzept erbracht werden sollte. Dazu wurden über 1800 Drehwaagemessungen aus den Untersuchungsgebieten Weddingstedt und Verden an der Aller herangezogen. In beiden Testgebieten konnte gezeigt werden, dass die von uns entwickelten Verfahren zur geostatistischen Integration, Differentiation und Verknüpfung funktionieren und zur Bearbeitung anspruchsvoller Aufgaben eingesetzt werden können. Wie dabei vorzugehen ist, wird hier im Testgebiet Verden an der Aller demonstriert.

Im Prinzip liefern die geostatistischen Verfahren genau die gleichen Ergebnisse wie die völlig anders abgeleitete Kollokation. In der Arbeit wird der geostatistische Zugang mit alternativen Auswertemethoden verglichen. Der in Anlehnung an Haalck (1950) gewählte mehrstufige Auswerteprozess liefert tiefere Einsichten bei der Ableitung der Modellparameter. Für die Ermittlung der Parameter der Kovarianzfunktion sind von uns ebenfalls neue Verfahren entwickelt worden, die nach dem Prinzip der Rückwärtssteuerung arbeiten und die alle funktional abhängigen Datenklassen berücksichtigen können (Menz 2000 und Menz/Kolesnikov 2001). In der weiterführenden Forschung sollte untersucht werden, ob sich durch den Einsatz dieser Verfahren die Ableitung der Modellparameter vereinfachen lässt.

Schließlich sollte mit dem Beitrag zur terrestrischen Gradiometrie auch darauf aufmerksam gemacht werden, dass es technologisch möglich ist, die Informationen aus der geophysikalischen Reichaufnahme für die Geoidbestimmung im lokalen Bereich zu aktivieren. Gradiometrische Beobachtungen sind zusätzliche Datenklassen, aus denen unter entsprechenden Voraussetzungen Informationen zur Verbesserung der Geoidbestimmung abgeleitet werden können. Gegenwärtig konzentrieren sich die Forschungsarbeiten auf die Bereitstellung gradiometrischer Beobachtungen durch Satellitenmissionen, wie z. B. GOCE. Für die gemeinsame Auswertung dieser und bereits vorhandener Beobachtungen aus anderen Datenklassen könnte der Einsatz geostatistischer Methoden in Erwägung gezogen werden.

## Literatur

- Arabelos, D., Tscherning, C. C.: Computation of the Gravity Vector from Torsion Balance Data in Southern Ohio. *J. Geophys. Res.*, 92: 8157–8168, 1987.
- Baldschuhn, R., Frisch, U., Kockel, F.: Geotektonischer Atlas von NW-Deutschland 1 : 300000. 16 Kt., 7 Taf., Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe, Hannover, 1996.
- Betz, D., Führer, F., Greiner, G., Plein, E.: Evolution of the Lower Saxony Basin. *Tectonophysics* 137: 127–170, 1987.
- Denker, H., Torge, W.: The European gravimetric quasigeoid EGG97 – An IAG supported continental enterprise. In: Forsberg, R., Feissel, M., Dietrich, R.: *Geodesy on the move. Gravity, Geoid, Geodynamics, and Antarctica*. IAG Symp. Proceed. 119, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1998.
- Eötvös, R.: Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveaulächen mit Hilfe der Drehwaage. *Verhandlungen der XV. allgemeinen Konferenz der internationalen Erdmessung in Budapest*, Bd. I: 337–395, Budapest, 1906.
- Goad, C. C., Tscherning, C. C., Chin M. M.: Gravity empirical covariance values for the continental United States. *J. Geophys. Res.* 89: 7962–7968, 1984.
- Goltz, G.: Lokale Schwerefeldbestimmung und -modellierung mit Hilfe der Ableitungen des Schwerepotentials. *Berliner Geowissenschaftliche Abhandlungen*, Reihe B, Band 39, Berlin, 2001.
- Graf, A.: *Gravimetrische Instrumente und Meßmethoden*. Handbuch der Vermessungskunde, Band Va, Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1967.
- Haalck, H.: *Die gravimetrischen Verfahren der angewandten Geophysik*. [In:] *Sammlung geophysikalischer Schriften*, 10, Berlin, 1929.
- Haalck, H.: *Die vollständige Berechnung örtlicher gravimetrischer Störfelder aus Drehwaagemessungen*. Veröff. Geod. Inst. Potsdam, 4, Potsdam, 1950.
- Hein, G. W.: *Untersuchungen zur terrestrischen Schweregradiometrie*. Deutsche Geod. Komm., Reihe C, Heft 264, München, 1981.
- Heineke, U.: *Untersuchungen zur Reduktion und geodätischen Verwendung von Drehwaagemessgrößen*. Wiss. Arb. Fachr. Verm. wesen Univ. Hannover 86, Hannover, 1978.
- Hermes, H. J.: Calculation of Prezechstein Bouguer-Anomaly in Northwest Germany. *First Break* 4: 13–22, Den Haag, 1986.
- Hillmann, T.: Eine iterative Methode zur Schätzung der Kovarianzfunktion für geostatistische Vorhersagen. *TU Bergakademie Freiberg (Dissertation, unveröffentlicht)*, Freiberg, 1997.
- Jaritz, W.: Eine Übersichtskarte der Tiefenlage der Salzstöcke in Nordwestdeutschland. *Geol. JB.* 90: 241–244, 1 Taf., Hannover, 1972.
- Jaritz, W.: Zur Entstehung der Salzstrukturen Nordwestdeutschlands. *Geol. JB.*, A 10, 2 Taf., Hannover, 1973.
- Knospe, S.: Geologisches Modell und lokales Schwerefeld. In: J. Menz (2000): 115–129, 2000.
- Knospe, S.: *Anwendungen geostatistischer Verfahren in den Geowissenschaften – Fallbeispiele unter Einbeziehung zusätzlicher Fachinformationen*. TU Bergakademie Freiberg (Dissertation, eingereicht), Freiberg, 2001.
- Kolesnikov, N.: *Bereitstellung von Strukturinformationen für Flächen topographischer Ordnung*. In: J. Menz: *Markscheiderisch-geologische Komplexauswertung unter geostatistischem Zugang*. Forschungsabschlußbericht zum Thema DFG III 03-Me 1111/2-1, TU Bergakademie Freiberg, Institut für Markscheidewesen und Geodäsie, Teil 2, Freiberg (Bibliothek der TU), 1998.
- Krupar, T., Tscherning, C. C.: Evaluation of isotropic covariance function of torsion balance of observations. *Bull. Geod.* 58: 180–192, Springer Verlag, Berlin – Heidelberg, 1984.
- Lehmann, R.: On the allocation and assessment of absolute values for geoid determination using torsion balance measurements. In: J. Menz (2000): 105–113, 2000.
- Menz, J.: Geostatistische Vorhersage des Schichtenverlaufes im Gebirge auf der Grundlage von Bohrungen, Stoßbemusterungen und geophysikalischen Messungen. *Das Markscheidewesen* 98: 70–73, 1991.
- Menz, J.: Fallstudien zur Ableitung der Modellparameter bei geostatistischen Vorhersagen. *Das Markscheidewesen* 101: 54–61, 1994a.
- Menz, J.: Geostatistische Modellannahmen, Universelles Kriging und die Probleme bei der empirischen Ermittlung der Modellparameter, Schätzungen im Raum- und Spektralbereich. *Forschungsbericht*, DFG III 03-Me 1111/2-1, TU Bergakademie Freiberg, Institut für Markscheidewesen und Geodäsie, Freiberg (TU Bibliothek), 1994b.
- Menz, J.: *Markscheiderisch-geologische Komplexauswertung unter geostatistischen Modellannahmen*. Forschungsbericht, DFG III 03-Me 1111/2-1, TU Bergakademie Freiberg, Institut für Markscheidewesen und Geodäsie, Freiberg (TU Bibliothek), 1994c.
- Menz, J.: Kreuzkorrelationen und ihre Berücksichtigung bei der geostatistischen Vorhersage. In: W. Linnenberg (ed.): *Einsatz von DV-Methoden im Umweltbereich*. Schriftenreihe des BDG (Berufsverband Deutscher Geologen, Geophysiker und Mineralogen e. V.) 14: 5–6, Bonn, 1995.

- Menz, J.: Anwendung der Geostatistik zur Gebirgs- und Lagerstätten-geometrisierung. In: Dresen, L., Fertig, J., Jordan, F., Rüter, H.: Neue Wege in Exploration und Produktion. Ruhr-Universität Bochum: 13–44, Bochum, 1996.
- Menz, J.: Markscheiderisch-geologische Komplexauswertung unter geostatistischem Zugang. Forschungsabschlußbericht zum Thema DFG III 03-Me 1111/2-1, TU Bergakademie Freiberg, Institut für Markscheidewesen und Geodäsie, Teile 1 bis 4, Freiberg (TU Bibliothek), 1998.
- Menz, J.: Forschungsergebnisse zur Geomodellierung und ihre Bedeutung. In: Thiergärtner, H. (ed.): Fortschritte der Geoinformatik. Tagungsheft, Mathematische Geologie 4: 19–30, CPress Verlag, Dresden, 1999.
- Menz, J.: Angewandte Geostatistik in Bergbau, Geologie, Geophysik, Geodäsie und Umweltschutz. Mathematische Geologie 5, CPress Verlag, Dresden, 2000.
- Menz, J.: Forschungsarbeiten im Rahmen des Leibniz-Programms der DFG zur »Markscheiderisch-geologischen Komplexauswertung unter geostatistischen Modellannahmen« – Aufgabenstellung, Ergebnisse und ihre Bedeutung. In: J. Menz (2000): 7–21, 2000a.
- Menz, J.: Lokale Schwankungen des Quasigeoids, abgeleitet aus Drehwaagemessungen unter Nutzung der geostatistischen Integration, Differentiation und Verknüpfung, mit einer Einführung in das Gebiet der Physikalischen Geodäsie. In: J. Menz (2000): 69–104, 2000b.
- Menz, J., Bian, S.: The local geoid determination by Stokes formula in an engineering and mining scale. *Allg. Verm.-Nachr.* 105: 69–72, Heidelberg, 1997a.
- Menz, J., Bian, S.: Implementing the Fourier series as a local geopotential model in the local gravity field modelling. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, Rivista dell'Istituto Geogr. Mil.* LVII: 293–306, 1997b.
- Menz, J., Knospe, S.: Lokale Bestimmung des Geoids aus terrestrischen Gradiometermessungen unter Nutzung der geostatistischen Integration, Differentiation und Verknüpfung. Vortrag INTERGEO 2001, Geodätische Woche Session 8: Geodätische Datenanalyse, Geostatistik, Mathematische Statistik, Validierung, Qualitätsanalyse, GIS, diskrete Modelle. Köln, 2001.
- Menz, J., Kolesnikov, N.: Ableitung der Modellparameter für die geostatistische Vorhersage aus den Differenzen zweier Vorhersageverfahren. Vortrag INTERGEO 2001, Geodätische Woche Session 8: Geodätische Datenanalyse, Geostatistik, Mathematische Statistik, Validierung, Qualitätsanalyse, GIS, diskrete Modelle. Köln, 2001.
- Menz, J., Kolesnikov, N.: Bestimmung der Parameter der Kovarianzfunktion aus den Differenzen zweier Vorhersageverfahren. In: J. Pilz (ed.): Geostatistik und GIS. Mathematische Geologie 7 (in Vorbereitung), CPress Verlag, Dresden, 2002.
- Menz, J., Pilz, J.: Kollokation, Universelles Kriging und BAYESscher Zugang. *Das Markscheidewesen* 101: 62–66, 1994.
- Menz, J., Pilz, J.: Bayessche Kollokation – Äquivalenzen zwischen Ausgleichsrechnung und Geostatistik. *Das Markscheidewesen* 104: 85–90, 1997.
- Militzer, H., Weber, F. (Hrsg.): Angewandte Geophysik. Bd. 1, Springer Verlag, Wien, Akademie Verlag, Berlin, 1984.
- Moritz, H.: On the Computation of a Global Covariance Model. Ohio State University, Dep. of Geod. Science Report 255, Columbus, Ohio, 1977.
- Moritz, H.: Advanced Physical Geodesy. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1989.
- Mueller, I.I.: The Gradients of Gravity and their application in Geodesy. Ohio State University, Dep. of Geod. Science, Columbus, Ohio, 1960.
- Olea, R.A., Pawlowsky, V.: Compensating for Estimation Smoothing in Kriging. *Mathematical Geology* 28: 407–417, 1996.
- Reilly, W.I.: Mapping the Local Geometry of the Earth's Gravity Field. Department of Scientific and Industrial Research, Geophysics Division Rep. No. 143, Wellington, New Zealand, 1979.
- Röttig, A.: Gradientenkriging – Eine integrierende geostatistische Methode zur einheitlichen Auswertung von absoluten und relativen Messdaten. Dissertation, TU Bergakademie Freiberg (Dissertation, unveröffentlicht), Freiberg, 1997.
- Röttig, A., Tonn, F., Tzscharschuch, D., Wendel H.-J.: SAFARI – Eine erweiterte geostatistische Software. In: J. Menz (2000): 23–33, 2000.
- Seleny, P.: Roland Eötvös gesammelte Arbeiten. Budapest, 1953.
- Torge, W.: Geodesy. 3<sup>rd</sup> ed., W. de Gruyter Verlag, Berlin – New York, 2001.
- Tóth, Gy., Rózsa, Sz., Ádám, J., Tziavos, I.N.: Gravity field modelling by torsion balance data – A case study from Hungary. Vortrag IAG 2001 general assembly, Budapest, Hungary, 2–7 Sept. 2001.
- Tscherning, C. C., Rapp, R.H.: Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, Deflections of the Vertical Implied by Anomaly Degree Variance Models. The Ohio State University, Dep. of Geod. Science Report 208, Columbus, Ohio, 1974.
- Völgyesi, L.: Geoid Computations Based on Torsion Balance Measurements. *Rep. Finnish Geod. Inst.* 98: 145–151, 1998.
- Wenzel, H.G.: Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde. *Wiss. Arb. Fachr. Verm.wesen Univ. Hannover* 137, Hannover, 1985.
- Wälder, K.: Modellierung und Erkundung räumlich verteilter Parameter. TU Bergakademie Freiberg (Dissertation, unveröffentlicht), Freiberg, 1997.

**Anschrift der Autoren**

Prof. Dr.-Ing. Joachim Menz  
 Institut für Markscheidewesen und Geodäsie  
 TU Bergakademie Freiberg  
 Agricolastraße 1  
 09596 Freiberg  
 menz@mabb.tu-freiberg.de

Dipl.-Geol. Steffen Knospe  
 Institut für Geotechnik und Markscheidewesen  
 TU Clausthal  
 Erzstraße 18  
 38678 Clausthal-Zellerfeld  
 steffen.knospe@tu-clausthal.de