

Erstellung eines digitalen Höhenmodells (DHM) mit Dreiecks-Bézier-Flächen

Holger Hähnle und Erik W. Grafarend

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden die mathematischen Grundlagen zur Berechnung von Dreiecks-Bézier-Flächen vorgestellt, um mit diesen dann ein Digitales Höhenmodell zu erstellen. Die mathematischen Grundlagen werden anhand einer Beispielfläche erläutert und anschließend auf ein Testgebiet des Landesvermessungsamts Baden Württemberg (LVA) übertragen. Die Ergebnisse des LVA werden mit dem kubischen Ansatz der Dreiecks-Bézier-Flächen verglichen.

Summary

In this work we present the mathematical basics of Triangular Bézier Patches for their use in generating a Digital Height Model. The mathematical principles will be explained with a simple example and then transformed on a bigger area which is of the »Landesvermessungsamt Baden Württemberg«. The results of this work will then be compared with the results of the LVA.

Einleitung

Da heutzutage immer mehr Konstruktions- und Modellierungsaufgaben mit CAD-Programmen bewältigt werden, werden adäquate mathematische Modelle zur Darstellung von Zeichnungselementen im 2-dimensionalen und Flächen bzw. Körper im 3-dimensionalen im Rechner gebraucht. Einfache Objekte wie Linien, Polygone, Kreise bzw. Quader, Prismen, Kugeln lassen sich mit einfachen Formeln im Rechner mit Parametern zur Positionierung und Dimensionierung darstellen. Die Wahl der Parameter ist bei der Konstruktion solcher Objekte am Bildschirm sehr einfach, da sie sich unmittelbar in der realen Welt messen lassen.

Anders sieht es dagegen bei (in der Realität häufig vorkommenden) gekrümmten Formen aus: Solange sie nicht zu komplex sind, lassen sie sich durch Kugelflächen annähern und zusammensetzen. Bei komplexeren Formen wird häufig mit kleinen Dreiecken gearbeitet, die eine gekrümmte Fläche approximieren sollen.

Der große Nachteil dieser Methoden ist, dass sie für den Konstrukteur am Bildschirm schwer zu handhaben sind, da er es statt mit einer gekrümmten Fläche plötzlich mit einer Vielzahl von Objekten zu tun hat. Die Beeinflussung der Form solcher zusammengesetzter Objekte ist wegen der jetzt großen Anzahl von einzustellenden Parametern sehr aufwendig bzw. unmöglich. Des Weiteren ergibt sich das Problem, dass bei einer Vergrößerung eines

solchen zusammengesetzten Objektes wieder die Dreiecke in den Vordergrund treten, die Approximation also nicht fein genug ist. Um so stärker eine Verfeinerung vorgenommen wird, um so größer ist der Speicher- und Rechenzeitverbrauch bei der Arbeit mit solchen Objekten. Im Allgemeinen ist der Verlauf eines auf diese Weise konstruierten Objektes nicht glatt.

Hier versuchen wir, einen anderen Weg zu gehen, um gekrümmte Linien und Flächen zu modellieren:

Durch die Vorgabe von einigen wenigen Kontrollpunkten möchten wir eine (nichtlineare) Funktion definieren, die das zu konstruierende Objekt möglichst genau nachformt. Die Parameter einer solchen Funktion lassen sich nicht in der Realität wiederfinden, müssen also durch mathematische Mittel aus der Lage der Kontrollpunkte ermittelt werden.

Es gilt also geeignete Funktionen zu bestimmen sowie Methoden zur Ermittlung der Funktionsparameter bei gegebenen Kontrollpunkten. Solche Funktionen sind die Bernstein-Polynome, die zur Berechnung von Bézier-Flächen benutzt werden. In dieser Arbeit beabsichtigen wir, ein Digitales Höhenmodell auf Basis von Dreiecks-Bézier-Flächen zu erstellen.

1 Dreiecks-Bézier-Flächen

Soll die Oberfläche eines vorgegebenen Objektes durch Bézier-Spline-Flächen approximiert werden, kann es vorkommen, dass eine Flächenbeschreibung allein mit viereckigen Patches nicht möglich ist. Es können sich z. B. dreieckige »Restgebiete« ergeben.

Ein einfacher Ausweg ist nun, das viereckige Parametergebiet zu einem dreieckigen Gebiet entarten zu lassen, indem:

- eine Viereckseite zu einem Punkt schrumpft (siehe Abbildung 1.1 linkes Dreieck) oder
- zwei Viereckseiten in Strecklage gebracht werden, d. h. z. B., dass die Tangenten an die Patch-Randkurve im Punkt P_{00} einen Winkel von 180° einschließen (siehe Abbildung 1.1 rechtes Dreieck).

Beide Lösungen werden in der Praxis eingesetzt, liefern aber unbefriedigende Ergebnisse. Diese unbefriedigende Situation kann beseitigt werden, wenn Flächen konstruiert werden, denen ein nichtausgeartetes dreieckiges Parametergebiet zugrunde liegt.

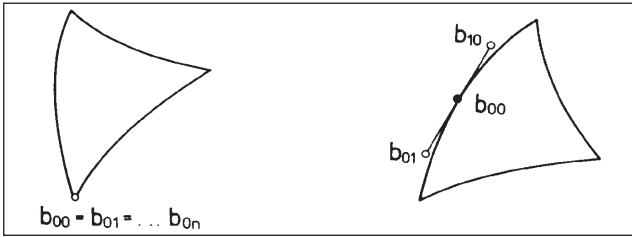


Abb. 1.1: Ausgeartete Tensorprodukt-Flächen

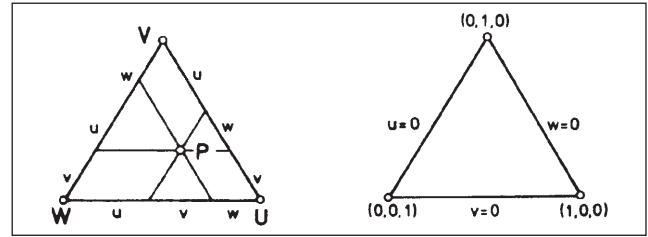


Abb. 1.2: Baryzentrische Koordinaten

1.1 Baryzentrische Koordinaten

Bei homogenen Koordinaten, zu denen die baryzentrischen Koordinaten gehören, hat die einzelne Koordinate keine unmittelbare Bedeutung für die Lage des Punktes. Die Lage des Punktes bestimmt sich aus dem Verhältnis der Koordinaten zueinander. In homogenen Koordinatensystemen besitzen auch unendlich ferne Punkte endliche Koordinaten. Das baryzentrische Koordinatensystem Σ im n -dimensionalen affinen Raum A_n besteht aus $n+1$ Punkten P_1, P_2, \dots, P_{n+1} . Die $n+1$ Punkte dürfen nicht alle gemeinsam in einer Hyperebene von A_n liegen. Die baryzentrischen Koordinaten eines Punktes P sind diejenigen (positiven oder negativen) Gewichte Λ_i ($\sum \Lambda_i = 1$), mit denen die Punkte P_i ($i=1, \dots, n+1$) versehen werden, damit ihr Schwerpunkt der Punkt P ist. Werden baryzentrische Koordinaten eines Punktes mit derselben Zahl ($\neq 0$) multipliziert, so bleibt der durch sie bestimmte Punkt der gleiche.

In diesen Koordinaten können die Bernstein-Polynome mit der Nebenbedingung (1.2) beschrieben werden (1.1). Die $B_{ij}^n(u, v)$ können dabei als Summanden von $(u+v)^n = 1$ gedeutet werden. Dieses P Dreiecks mit den Ecken U, V, W kann durch die baryzentrische Koordinaten (u, v, w) mit der Nebenbedingung (1.3) festgelegt werden über (1.2).

$$B_i^n(t) = B_{ij}^n(u, v) = \frac{n!}{i!j!} u^i v^j \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} i + j &= 1; & i, j &\geq 0; \\ u + v &= 1; & u, v &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$u + v + w = 1, \quad u, v, w \geq 0 \quad (1.3)$$

$$P(u, v, w) = uU + vV + wW. \quad (1.4)$$

Abbildung 1.2 gibt einige geometrische Deutungen der baryzentrischen Koordinaten: In Abbildung 1.2 hat der Eckpunkt V die Koordinaten $(0,1,0)$, die Seite UV die Gleichung $w=0$. Ein beliebiger Punkt $P(u,v,w)$ ergibt sich über (proportionale) Parallelverschiebung. Das Dreieck (U, V, W) heißt Grunddreieck des baryzentrischen Koordinatensystems. Punkte innerhalb des Grunddreiecks haben durchweg positive Komponenten, Punkte außerhalb

des Grunddreiecks haben mindestens eine negative Komponente.

In Abbildung 1.3 wird eine weitere für die Konstruktion transfiniter Dreiecks-Interpolanten wichtige geometrische Deutung der baryzentrischen Koordinaten gegeben.

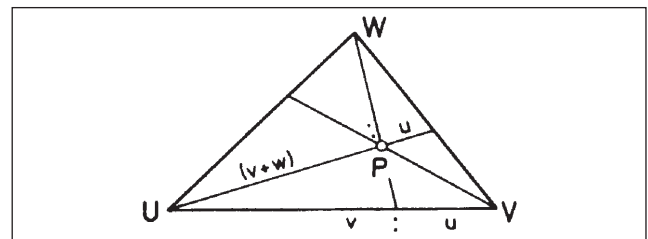


Abb. 1.3: Baryzentrische Koordinaten als Teilverhältnisse

Baryzentrische Koordinaten sind invariant unter affinen Transformationen, d. h. bezeichnet $P \rightarrow \hat{P} = LP + T$ eine affine Transformation mit linearem Anteil L und Translationsanteil T , dann besitzt \hat{P} bezüglich des transformierten Dreiecks die gleichen baryzentrischen Koordinaten wie P bezüglich des ursprünglichen Dreiecks. Aus diesem Grund kann ein einzelnes Dreieck auch als gleichseitiges Dreieck dargestellt werden. Dies ist dann sinnvoll, wenn die Symmetrie in u, v und w optisch zum Ausdruck gebracht werden soll. Abbildung 1.4 veranschaulicht die affine Invarianz.

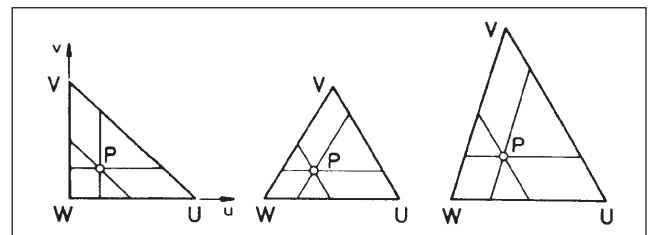


Abb. 1.4: Affine Invarianz baryzentrischer Koordinaten

1.2 Verallgemeinerte Bernstein-Polynome und Dreiecks-Bézier-Flächen

Mit Hilfe von baryzentrischen Koordinaten lassen sich bequem Bernstein-Polynome über einem Grunddreieck definieren: Es wird die Identität (1.3) ausgenutzt, wobei die elementaren Beziehungen (1.4), (1.5) sowie (1.6) gültig sind. So folgen als verallgemeinerte Bernstein-Polynome vom Grad n (1.7) mit (1.8).

Da die verallgemeinerten Bernstein-Polynome linear unabhängig sind, bilden sie eine Basis eines Unterraumes des Vektorraumes der Polynome vom Grad (n, n) mit der Dimension $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Jedes Element X des von B_{ijk}^n aufgespannten linearen Raumes hat die eindeutige Darstellung (1.9).

$$(u + v + w)^n = \sum_{\substack{i,j,k \geq 0 \\ i+j+k=n}} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad (1.3)$$

$$(u + [v + w])^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (v + w)^{n-i}, \quad (1.4)$$

$$(v + w)^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} v^j w^{n-i-j} \quad (1.5)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (1.6)$$

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} i + j + k &= n, & i, j, k &\geq 0, \\ u + v + w &= 1, & u, v, w &\geq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$X(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} b_{ijk} B_{ijk}^n(u, v, w). \quad (1.9)$$

$X(u, v, w)$ ist die Parameterdarstellung einer Dreiecks-Bézier-Fläche vom Grad n . Die Koeffizienten b_{ijk} von (1.9) werden Bézier-Punkte genannt, sie bilden das Bézier-Netz oder Bézier-Polyeder.

Die Eck-Bézier-Punkte $b_{00n}, b_{0n0}, b_{n00}$ sind Flächenpunkte, die auf den Rändern liegenden Nachbarpunkte dieser Eckpunkte legen die Tangenten an die Randkurve fest, die beiden Rand-Nachbarpunkte eines Eckpunktes bestimmen die Tangentialebene in dem jeweiligen Eckpunkt der Dreiecks-Bézier-Fläche.

Die Koeffizienten in (1.8) können wieder reelle Zahlen sein (Bézier-Ordinaten $b_{ijk} \in \mathbb{R}$), wodurch eine funktionswertige Dreiecks-Bézier-Fläche des \mathbb{R}^3 definiert wird, oder sie können vektorwertig sein ($b_{ijk} \in \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$): Bézier-Ordinaten werden über den Punkten $\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)$ des Grunddreiecks angetragen.

1.3 Anschlussbedingungen für Dreiecks-Bézier-Flächen

Die Dreiecks-Bézier-Fläche wird üblicherweise in der Praxis benutzt, da es einfacher ist, eine große Fläche in Teildreiecke zu zerlegen als in Teilrechtecke. Deshalb ist

es von Bedeutung, die Anschlussbedingungen für einen glatten Übergang zwischen den einzelnen Teilflächen zu finden.

Die Idee, die jetzt dahinter steckt, besteht darin, dass man drei Vektoren berechnet, die Tangenten zur Oberfläche der gemeinsamen Grenzkurve sind. Damit man einen glatten Übergang erhält, muss gelten, dass die drei Vektoren koplanar sind. Wegen der Nebenbedingung $u + v + w = 1$ (mit $0 \leq u, v, w \leq 1$) stimmen die partiellen Ableitungen nicht mit den Richtungsableitungen längs der Parameterlinien überein. Im Folgenden werden mit den Ableitungen D stets Richtungsableitungen verstanden. Die Richtungsableitungen können vermieden werden, wenn z.B. die Nebenbedingung $w = 1 - u - v$ in die abzuleitende Funktion eingesetzt wird. Dann treten nur noch die partiellen Ableitungen nach u und v auf, die Parameterlinien $w = \text{konstant}$ gehen »verloren«.

Wir wollen nun die Übergangsbedingungen längs der Randkurve $u = 0$ entwickeln. Wir setzen als Dreiecks-Bézier-Flächen C^0 -stetig sein, d.h. es gilt (1.11). Daraus folgt dann aus (1.12) und mit $w = 1 - u - v = 1 - v$, da $u = 0$ (1.13).

Analoges vorgehen bei $X_2(u, v, w)$.

Für die C^1 -Stetigkeit müssen die Tangentialebenen der beiden Flächen längs der Randlinie = Grenzkurve übereinstimmen.

Die Berechnung der C^1 -Stetigkeit erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt

Bild 1.5 zeigt zwei kubische Dreiecks-Bézier-Flächen $X_1(u, v, w)$ und $X_2(u, v, w)$, die an der gemeinsamen Grenzkurve $X_1(0, v, w)$ und $X_2(0, v, w)$ aneinander liegen. Gleichung 1.12 zeigt wie die Grenzkurve durch Bézier-Kurven ausgedrückt werden kann. Diese Gleichung lässt sich leicht nach v ableiten (1.14).

2. Schritt

Man berechnet nun einen zweiten Vektor, der ebenfalls Tangente zur Fläche $X_1(u, v, w)$ an der gemeinsamen Grenze ist. Diesmal berechnet man aber den Tangentialvektor der Fläche in u und setzt dann anschließend $u = 0$. Aus Gleichung 1.12 folgt dann (mit $w = 1 - u - v$) (1.15).

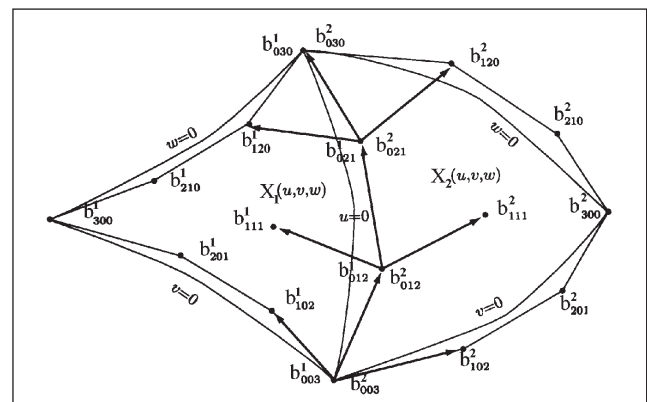


Abb. 1.5: Glatter Zusammenschluss zweier Bézier-Dreiecke

3. Schritt

Der dritte Vektor ist der Tangentialvektor zur Fläche $X_2(u, v, w)$ an der gemeinsamen Grenze. Die Berechnung erfolgt analog wie beim 2. Schritt. Man erhält somit (1.16). Die Bedingung für einen glatten Übergang ist die, dass die Gleichungen 1.14 bis 1.16 koplanar für jeden Wert von v sind.

Daraus folgt (1.17). Mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ als frei wählbare Designparameter folgt durch Koeffizientenvergleich (1.18). Der Sonderfall zusammenfallender Tangenten an die Parameterlinien folgt daraus für $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -1$. Es gilt dann (1.19), d. h. aber, dass die Kanten des Bézier-Netzes paarweise parallel sind.

$$X_1(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} b_{ijk}^1 B_{ijk}^n(u, v, w) \text{ und} \tag{1.10}$$

$$X_2(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} b_{ijk}^2 B_{ijk}^n(u, v, w) \tag{1.10}$$

$$X_1(0, v, w) = X_2(0, v, w) \tag{1.11}$$

$$X_1(0, v, w) = \sum_{j+k=n} b_{0jk}^1 \frac{n!}{j!k!} v^j w^k \tag{1.12}$$

$$X_1(v) = \sum_{j+k=n} b_{0jk}^1 \frac{n!}{j!k!} v^j (1-v)^k \tag{1.13}$$

$$\frac{dX_1(v)}{dv} = n \sum_{j+k=n-1} (b_{0,j+1,k}^1 - b_{0,j,k+1}^1) B_{0jk}^{n-1} \tag{1.14}$$

$$\left. \frac{dX_1(u, v)}{du} \right|_{u=0} = n \sum_{i+j+k=n-1} (b_{i+1,j,k}^1 - b_{i,j,k+1}^1) B_{ijk}^{n-1} \Big|_{u=0} \tag{1.15}$$

$$\left. \frac{dX_2(u, v)}{du} \right|_{u=0} = n \sum_{j+k=n-1} (b_{0,j+1,k}^2 - b_{0,j,k+1}^2) B_{0jk}^{n-1} \tag{1.16}$$

$$\frac{dX_1(0, v, w)}{du} = \lambda_1 \frac{dX_2(0, v, w)}{du} + \lambda_2 \frac{dX_2(0, v, w)}{dv} \tag{1.17}$$

$$(b_{i,n-1-k,k}^1 - b_{0,n-1-k,k+1}^1) = \lambda_1 (b_{i,n-1-k,k}^2 - b_{0,n-1-k,k+1}^2) + \lambda_2 (b_{0,n-k-1,k+1}^2 - b_{0,n-k,k}^2) \tag{1.18}$$

$$b_{i,n-1-k,k}^1 - b_{0,n-1-k,k+1}^1 = b_{0,n-k,k}^2 - b_{i,n-1-k,k}^2 \tag{1.19}$$

2 Dreiecks-Bézier-Fläche 3. Grades (kubischer Ansatz)

In dieser Arbeit betrachten wir den kubischen Ansatz für eine Dreiecks-Bézier-Fläche. Für die Betrachtung des kubischen Ansatzes werden 10 Punkte benötigt. Die Werte der Bézier-Punkte sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst

und Abbildung 2.1 zeigt die daraus resultierende Dreiecks-Bézier-Fläche.

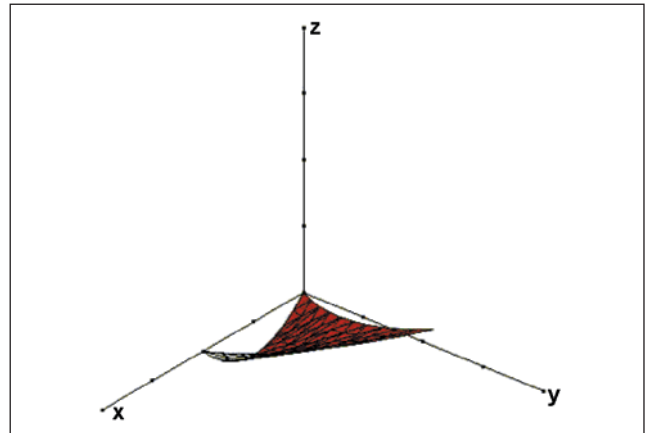


Abb. 2.1: Dreiecks-Bézier-Fläche 3. Grades

Nummerierung der Punkte	X	Y	Z
003	0	0	0
102	0.666	0	-0.666
201	1.333	0	-0.666
300	2	0	0
210	1.666	0.666	0
120	1.333	1.666	0.333
030	1	3	1
021	0.666	1.666	0.333
012	0.333	0.666	0
111	1	0.666	-0.333

Tab. 2.1: Koordinaten der Bézier-Punkte für eine Dreiecks-Bézier-Fläche 3. Grades

Es werden nachfolgend die einzelnen Bézier-Punkte mit Ausnahme der Eckpunkte verändert. Beginnen wir mit dem Punkt 102. Der z-Wert dieses Bézier-Punktes wird von -0.666 auf -2 verändert. Die Änderung des Wertes ist in Tabelle 2.2 dokumentiert. Die Änderungen sind unterstrichen.

Nummerierung der Punkte	X	Y	Z
003	0	0	0
102	0.666	0	<u>-2</u>
201	1.333	0	-0.666
300	2	0	0
210	1.666	0.666	0
120	1.333	1.666	0.333
030	1	3	1
021	0.666	1.666	0.333
012	0.333	0.666	0
111	1	0.666	-0.333

Tab. 2.2: Koordinaten der Bézier-Punkte nach der ersten Änderung

Die zugehörige Abbildung zur Tabelle 2.2 ist die Abbildung 2.2.

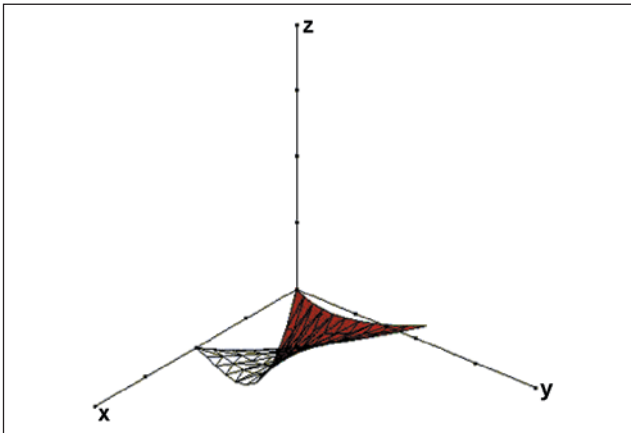


Abb. 2.2: Änderung der Dreiecks-Bézier-Fläche 3. Grades

Abbildung 2.2 verdeutlicht, wie der neue z-Wert des Bézier-Punktes 102 die Randkurve in seine Richtung zieht und dabei gleichzeitig die Wirkung des Bézier-Punktes 201 auf die Randkurve mit beeinflusst. Ein Bézier-Punkt nach dem anderen wird verändert, bis man am Schluss eine neue Gestalt der Fläche erhalten hat. Da die Auswirkung eines Bézier-Punktes, und der daraus resultierenden Einfluss auf die Dreiecks-Bézier-Fläche bekannt sein dürfte, sehen wir jetzt nur noch auf die letzte Änderung, der Änderung des Bézier-Punktes 111. Die vollständige Auflistung der veränderten z-Werte ist in Tabelle 2.3 enthalten und Abbildung 2.3 zeigt das Endresultat.

Nummerierung der Punkte	X	Y	Z
003	0	0	0
102	0.666	0	-2
201	1.333	0	1
300	2	0	0
210	1.666	0.666	-1
120	1.333	1.666	1.5
030	1	3	1
021	0.666	1.666	2.5
012	0.333	0.666	-1
111	1	0.666	-3

Tab. 2.3: Koordinaten der Bézier-Punkte nach der letzten Änderung

Der Einfluss des Bézier-Punktes 102 auf die Fläche wurde bereits oben besprochen. Die nächste Veränderung betrifft den Punkt 201, dessen z-Wert von -0.666 auf $+1$ gesetzt wird. Der z-Wert des Bézier-Punktes 210 wird von 0 auf -1 verändert. Diese Änderung ist in Abbildung 2.3 zu erkennen, wo dieser Bézier-Punkt die Randkurve nach unten zieht. Der z-Wert des Bézier-Punktes 120 hingegen wird von 0.333 auf 1.5 erhöht, was zur Folge hat, dass die Randkurve dadurch nach oben angezogen wird. Beim Bé-

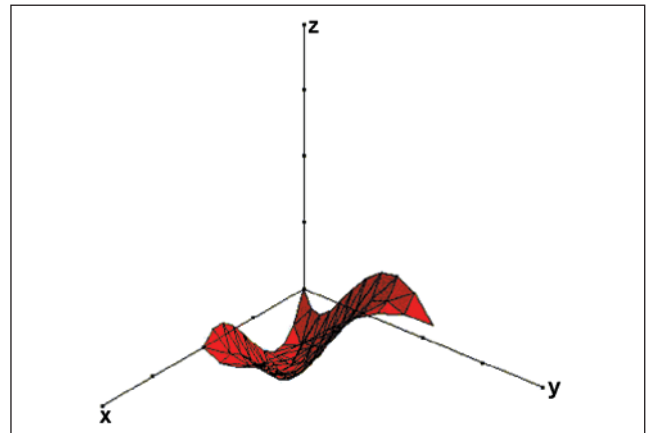


Abb. 2.3: Letzte Änderung der Dreiecks-Bézier-Fläche 3. Grades

zier-Punkt 021 wird der z-Wert von 0.333 auf 2.5 verändert und der z-Wert des Bézier-Punktes 012 von 0 auf -1 mit den entsprechenden Auswirkungen auf die Dreiecks-Bézier-Fläche. Als abschließender Punkt wird der z-Wert des Bézier-Punktes 111 von -0.333 auf -3 geändert. Dies hat zur Folge, dass eine Vertiefung in der Mitte der Dreiecks-Bézier-Fläche entsteht. Als letztes folgt die Darstellung der Dreiecks-Bézier-Fläche mit den zugehörigen Bézier-Punkten. Abbildung 2.4 zeigt deutlich den Einfluss der Bézier-Punkte auf die Dreiecks-Bézier-Fläche 3. Grades.

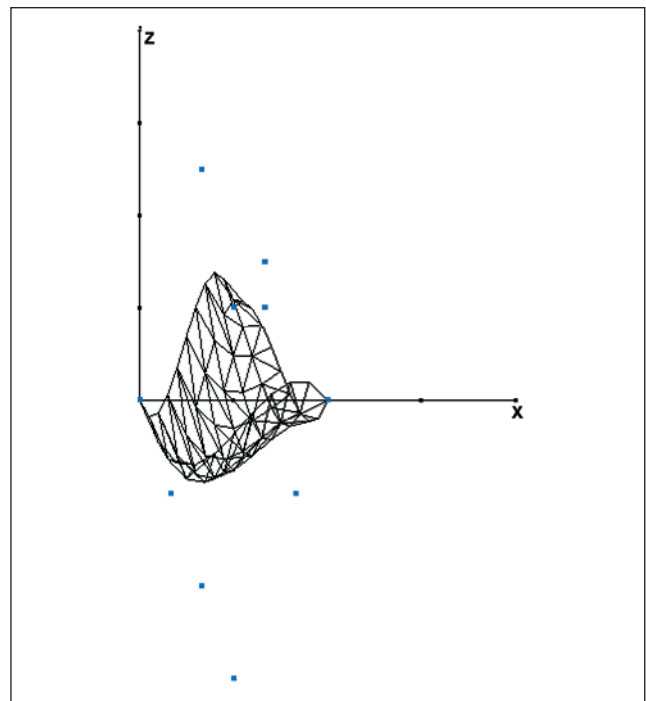


Abb. 2.4: Dreiecks-Bézier-Fläche mit zugehörigen Bézier-Punkte (Grundlage sind die Bézier-Punkte der letzten Änderung)

Als Letztes wird der Zusammenschluss zweier Dreiecks-Bézier-Flächen 3. Grades betrachtet. Tabelle 2.5 zeigt die Koordinaten der Bézier-Punkte und Abbildung 2.5 zeigt die zusammengeschlossenen Dreiecks-Bézier-Flächen.

Als zusätzliche Änderung wurde der z-Wert vom Bézier-Punkt 111 von -3 auf 3 gesetzt.

Nummerierung der Punkte	X1	Y1	Z1
003	0	0	0
102	0.666	0	-2
201	1.333	0	1
300	2	0	0
210	1.666	0.666	-1
120	1.333	1.666	1.5
030	1	3	1
021	0.666	1.666	2.5
012	0.333	0.666	-1
111	1	0.666	3
003	2	0	0
102	2.466	0.4	-1
201	2.966	0.8	0
300	3.5	1.2	0
210	2.9	1.466	0.266
120	2.066	2.066	0.6
030	1	3	1
021	1.333	1.666	1.5
012	1.666	0.666	-1
111	2.266	1.066	-1.5

Tab. 2.5: Koordinaten der Bézier-Punkte für zwei Dreiecks-Bézier-Flächen 3. Grades

In Abbildung 2.5 ist deutlich zu erkennen, dass je höher man den Grad der Dreiecks-Bézier-Fläche ansetzt, um so besser (glatter) können die Übergänge zwischen den einzelnen Dreiecks-Bézier-Flächen gestaltet werden.

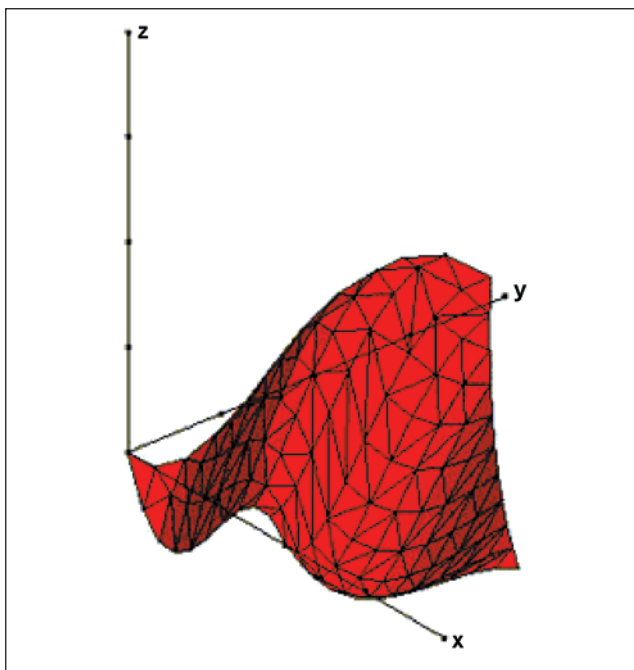


Abb. 2.5: Zusammenschluss zweier Dreiecks-Bézier-Flächen 3. Grades

3 Darstellung des Testgebietes

Die Daten zum Testgebiet stammen vom Landesvermessungsamt (LVA) Baden-Württemberg in Stuttgart und wurden von der Webseite www.lv-bw.de des LVA heruntergeladen. Die Koordinaten sind als Gauß-Krüger Koordinaten auf dem Besselellipsoid gegeben. Das Testgebiet wird durch folgende Gauß-Krüger Koordinaten eingegrenzt:

	R	H
Links unten	3532500	5379500
Rechts unten	3538000	5379500
Links oben	3532500	5385500
Rechts oben	3538000	5385500

Das Testgebiet wird mit dem kubischen Ansatz behandelt. Die Beispiele der Abbildungen des LVA sind in ihrer Ausdehnung größer als der verwendete Datensatz. Die daraus resultierende, aus Dreiecks-Bézier-Flächen konstruierte, Gesamtfläche ist in ihrer Ausdehnung dadurch kleiner. Durch die Seitenlänge von 150 m eines Bézier-Dreiecks ist die Auflösung der Grafik minimal schlechter als das des LVA. Es folgen einige Grafiken des LVA und dazu im Vergleich die mittels den Dreiecks-Bézier-Flächen geschaffenen Grafiken.

Betrachten wir zuerst das Testgebiet als Schattenmodell: Beim direkten Vergleich fällt sofort auf, dass das Schattenmodell des LVA eine größere Auflösung hat. Dies liegt

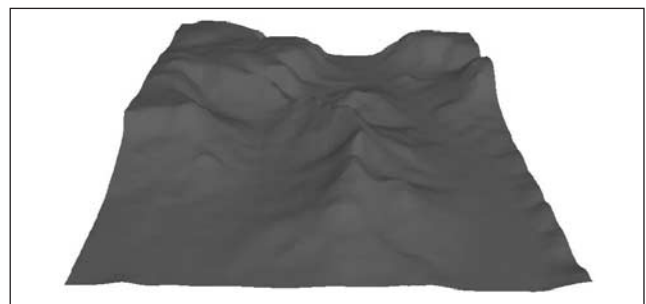


Abb. 3.1: Schattenmodell des Testgebietes

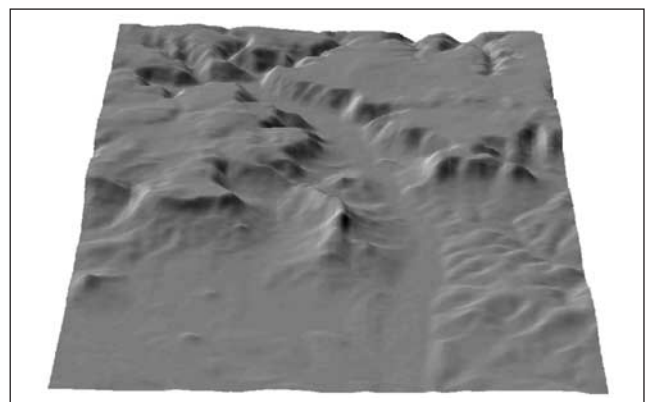


Abb. 3.2: Schattenmodell des LVA

daran, dass die Gitterlänge beim LVA 50 m beträgt und bei der Dreiecks-Bézier-Fläche 150 m.

Als letzte Grafik der Arbeit folgt das jeweilige Höhengschichtenmodell. Hierbei unterscheiden sich beide nur in ihrer Dimensionalität.

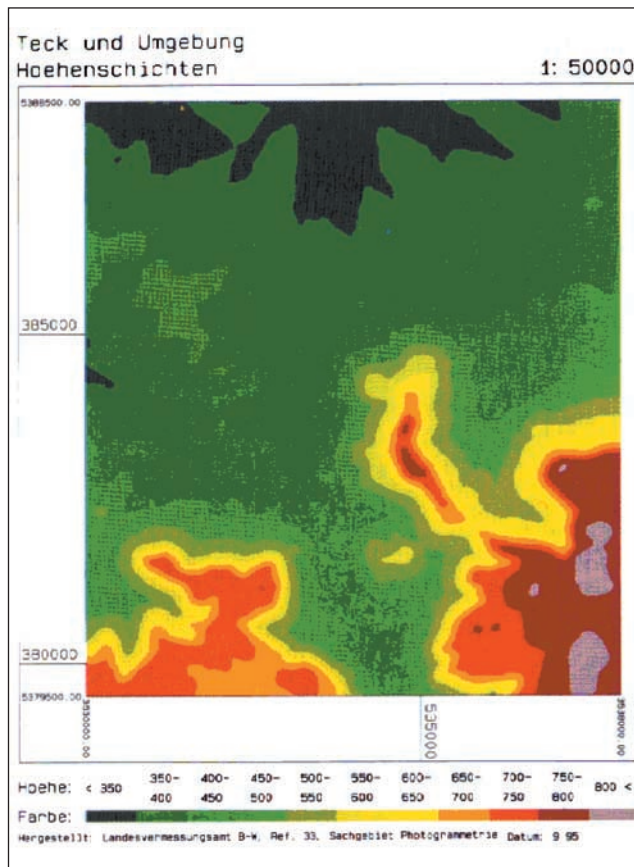


Abb. 3.3: Höhengschichtenmodell LVA

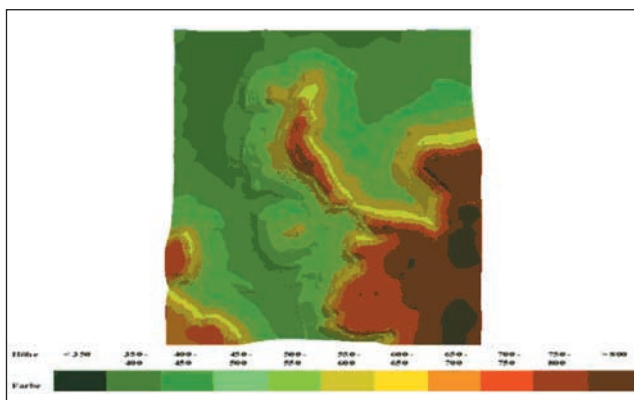


Abb. 3.4: Höhengschichtenmodell des Testgebietes (mit Dreiecks-Bézier-Flächen)

Schluss

In dieser Arbeit wurden im Kapitel 1 die mathematischen Grundlagen von Dreiecks-Bézier-Flächen vorgestellt und die Vorgehensweise, wie Dreiecks-Bézier-Flächen aneinander angeschlossen werden können, um einen glatten Übergang zu erhalten. Im Kapitel 2 dieser Arbeit wurden die mathematischen Grundlagen dieser Arbeit zuerst anhand eines einfachen Beispiels erklärt, um sie dann in Kapitel 3 auf ein größeres Gebiet zu übertragen. Wie in den Abbildungen 3.1–3.4 zu sehen ist, kann mit Dreiecks-Bézier-Flächen ein Digitales Höhenmodell ohne Weiteres erstellt werden, und es kann ohne Probleme mit dem Höhenmodell des LVA konkurrieren. Wie weiter oben angedeutet wurde, ist der Weg bis zum Endresultat sehr beschwerlich. Jede einzelne Dreiecks-Bézier-Fläche musste von Hand definiert werden. Falls ein Algorithmus zur Berechnung von Dreiecks-Bézier-Flächen kubischer Art gefunden wird, wird dieser mühsame Teil der Arbeit wegfallen.

Literatur

- Hill, F. S.: Computer Graphics Using OpenGL, Second Edition, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2001.
- Hoschek, J. und Lasser, D.: Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung. B.G. Teubner Stuttgart 1992.
- Salomon, D.: Computer graphics and geometric modeling. Springer: New York, Berlin, Heidelberg 1999.
- Weller, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden 1996.
- Willms, A.: GOTO C++-Programmierung. Addison Wesley Longman Verlag GmbH, 1999.
- Woo, M., Neider, J., Davis, T., Shreiner, D.: OpenGL Programming Guide, Third Edition, Silicon Graphics 1999.
- Wright, R. S., Sweet M.: OpenGL SuperBible. Second Edition, Waite Group Press, 2000.
- www.lv-bw.de (2001): Webseite des Landesvermessungsamtes Baden-Württemberg
- www.scilands.de (2001): Webseite der scilands GmbH (scientific landscapes)

Anschrift der Autoren

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. mult. Erik W. Grafarend
Geodätisches Institut
Universität Stuttgart
Geschwister-Scholl-Str. 24D
D-70174 Stuttgart
Tel. 0049 - 711-121 3390
Fax 0049 - 711 121 3285
e-mail grafarend@gis.uni-stuttgart.de

cand. geod. Holger Hähnle
h.haehnle@gmx.de